Tentamen 2018-08-24

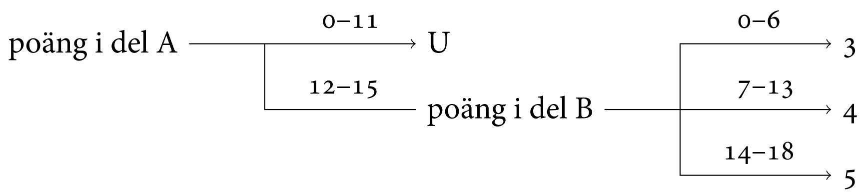
Examinator: Marco Kuhlmann

Denna tentamen består av två delar, del A och del B.

Del A består av 5 frågor à 3 poäng (totalt 15 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om de grundläggande begrepp och procedurer som behandlas på kursen. De kräver endast korta svar, såsom en uträkning, en kort text, eller ett diagram. Det krävs minst 12 poäng på denna del för att del B ska rättas.

Del B består av 3 frågor à 6 poäng (totalt 18 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om kursens mera avancerade begrepp och procedurer samt din problemlösningsförmåga. De kräver utförliga svar med korrekt notation och terminologi. Frågorna är ordnade i stigande svårighetsgrad.

Betyget på tentamen sätts enligt följande schema:



Observera att poäng från del A inte gäller i del B.

Frikort. Eventuella frikort från duggorna gäller för respektive frågor i del A; ett frikort från duggan om grafteori (tema 5) t.ex. gäller för frågan om grafteori (fråga 05). Du kan tillgodoräkna dig högst 3 frikort. Du behöver inte ange hur du vill tillgodoräkna dig dina frikort; detta kommer att göras på ett sätt som maximerar dina poäng.

Lycka till!

Del A

01 Logik och mängdlära

a) Bevisa följande logiska ekvation med hjälp av sanningsvärdestabeller. Skriv en kolumn för varje deluttryck, även för de deluttryck som du tycker är triviala.

$$p \leftrightarrow q \;=\; (p \to q) \wedge (p \vee \neg q)$$

b) Avgör om följande uttryck är tautologier, kontradiktioner eller ingendera. Beakta prioriteringsreglerna för de logiska konnektiven!

i) $(p \to q) \wedge \neg q \to q$

ii) $(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$

c) Tre mängder A, B, C är givna sådana att

- $|A \setminus (B \cup C)| = 7$
- $|(B \cap C) \setminus A| = 3$
- $|B \setminus (A \cup C)| = 8$
- $|(A \cap C) \setminus B| = 2$
- $|C \setminus (A \cup B)| = 5$
- $|(A \cap B) \setminus C| = 10$
- $|A \cap B \cap C| = 1$
- $|(A \cup B \cup C)^c| = 6$

Rita ett venndiagram för de tre mängderna. Skriv in rätt antal element i vardera sektor av venndiagrammet. Bestäm sedan antalet element i

i) $A \cup C$

ii) $C \setminus A$

02 Rekursion och induktion

a) En aritmetisk talföljd beskrivs genom $a_1 = 3$ och $d = 6$.

i) Bestäm a_{21}.

ii) Bestäm $\sum_{k=1}^{21} a_k$.

b) Här är en geometrisk talföljd: $3, 6, 12, \ldots$.

i) Bestäm a_{10}.

ii) Bestäm $\sum_{k=1}^{10} a_k$.

c) Visa med hjälp av induktion att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$. Redovisa utförligt (induktionsbas, induktionsantagande, induktionssteg)!

$$\sum_{i=1}^{n} (2i) = n^2 + n$$

03 Talteori

a) Ange alla (positiva) delare till talet 36. Ringa in de delare som är primtal.

b) Lista alla primtal upp till och med 75.

c) Använd Euklides' algoritm för att finna största gemensamma delaren till talen 238 och 510. Visa att du kan utföra Euklides' algoritm.

04 **Kombinatorik och sannolikhetslära**

Svara med ett konkret tal, inte med en formel!

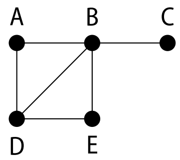
a) Du drar kort från en vanligt kortlek (52 kort). Hur många kort behöver du dra för att vara säker på att du har dragit minst två kort av samma färg (spader, hjärter, ruter, klöver)?

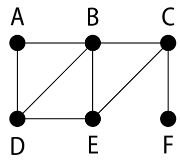
b) Från en grupp på 10 personer ska tre väljas. På hur många sätt kan detta göras om ordningsföljden är

i) oväsentlig　　　　ii) väsentlig

c) I en mojängfabrik tillverkas 60% av mojängerna vid maskin 1 och de övriga vid maskin 2. Maskinerna tillverkar en viss andel defekta mojänger; denna andel är 6% för maskin 1 och 3% för maskin 2. En kund påträffar en defekt mojäng. Hur stor är sannolikheten att den har tillverkats vid maskin 2?

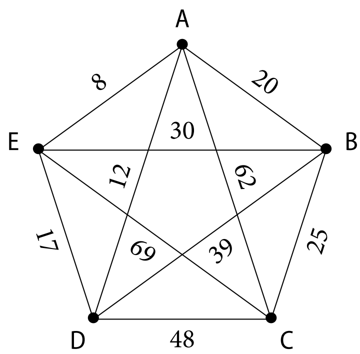
a) Avgör om grafen innehåller någon Eulerväg och visa i så fall hur den kan se ut.

i) 

ii) 

b) Rita ett träd med 7 noder där en av noderna har grad 2 och alla andra noder har antingen grad 3 eller grad 1.

c) Här är en viktad graf:



i) Använd närmaste granne-metoden för att finna en Hamiltoncykel i grafen som börjar i nod A. Ange även cykelns totalkostnad.

ii) Använd Kruskals algoritm för att finna ett minimalt uppspännande träd i grafen. Ange även trädets totalkostnad.

Del B

06 **Avancerad induktion**

a) Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n > 1$:

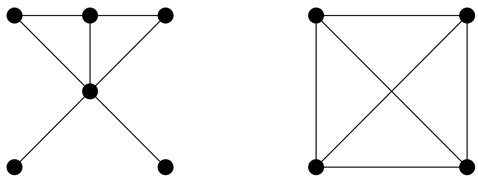
$$5^n + 10 < 6^n$$

b) Fibonaccis talföljd definieras genom den rekursiva formeln $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ med startvärdena $F_1 = 1$ och $F_2 = 1$. Använd den starka versionen av induktion för att visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$F_n < 2^n$$

07 **Eulers polyederformel**[1]

Här nedanför har vi ritat två grafer.



I den högra grafen finns det ett ställe där två bågar korsar varandra, utan att det finns en nod där. Den vänstra grafen innehåller ingen sådan korsning. En sammanhängande graf som kan ritas utan korsningar kallas *plan sammanhängande graf*. Den vänstra grafen är alltså en sådan graf medan den högra grafen inte är det.

För plana sammanhängande grafer gäller *Eulers polyederformel*. Denna formel visar på ett samband mellan antalet noder, bågar och ytor i sådana grafer. Med en *yta* menar vi här ett område som helt omsluts av ett antal bågar. Även området utanför grafen räknas som en yta. Om vi kallar antalet noder för N, antalet bågar för B och antalet ytor för Y så säger Eulers polyederformel att

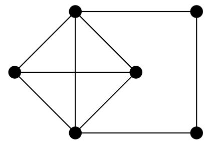
$$N - B + Y = 2\,.$$

(uppgiften fortsätter på nästa sida)

[1] Anpassad efter Szabo et al., *Matematik Origo 5*, Sanoma Utbildning 2013, sida 89–91.

a) Rita en plan sammanhängande graf med 5 noder och 4 ytor.

b) Leonard undersöker grafen här nedan. Han ser att grafen har 6 noder, 9 bågar och 6 ytor. Förbryllad konstaterar han att Eulers polyederformel inte verkar stämma. Förklara för Leonard varför han har fel.



c) Bevisa att Eulers polyederformel gäller för alla plana sammanhängande grafer. Använd induktion över det totala antalet noder och bågar. Induktionsbasen blir således den enklast tänkbara plana sammanhängande grafen, som har en nod och inga bågar. I induktionssteget ska du undersöka vad som händer när man lägger till antingen en ny nod eller en ny båge.

08 **Magi med tal**

Trollkarlen Numerix ber dig att välja ett godtyckligt tvåsiffrigt tal a (utan att säga vilket tal du valde) och skriva ner talet tre gånger i rad, så att du får ett sexsiffrigt tal. Numerix frågar dig efter din favoritfärg och födelsedag. Efter att ha fått svar på dessa frågor tänker han en stund och påstår sedan att han nu vet en delare av det sexsiffriga talet: 259. Du har svårt att tro att detta är korrekt, men en kontrollräkning med din mobiltelefon visar att Numerix hade rätt.

a) Visa att det sexsiffriga talet kan skrivas på formen $10101 \cdot a$.

b) Förklara varför det sexsiffriga talet måste vara delbart med 259. Ange ett annat tresiffrigt tal som Numerix hade kunnat ange.

c) Antag att Numerix hade bett dig att skriva ner talet a fyra gånger istället för tre, så att du hade fått ett åttasiffrigt tal. Förklara varför 259 *inte* hade fungerat i detta fall. (Ledning: Använd största gemensamma delare.)