Tentamen 2017-06-02

Examinator: Marco Kuhlmann

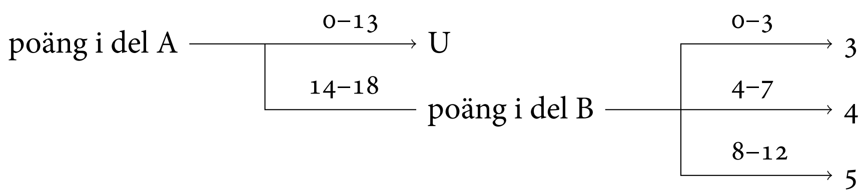
Denna tentamen består av två delar, del A och del B. Varje del omfattar ett antal frågor som var och en är värd 3 poäng.

Del A består av 6 frågor (totalt 18 poäng) som kan besvaras kortfattat, om inget annat anges. Det krävs minst 14 poäng på denna del för att del B ska rättas.

Eventuella frikort från duggorna gäller för respektive frågor i del A; ett frikort från duggan om grafteori t.ex. gäller för frågan om grafteori. Observera att du kan tillgodoräkna dig högst 3 frikort. Du behöver inte ange hur du vill tillgodoräkna dig dina frikort; jag kommer att göra det på ett sätt som maximerar dina poäng.

Del B består av 4 frågor (totalt 12 poäng) som kräver utförliga redovisningar (inte bara resultatet) med relevant och korrekt använd matematisk terminologi och notation. Frågorna är ordnade i stigande svårighetsgrad.

Betyget på tentamen sätts enligt följande schema:



Observera att poäng från del A inte gäller i del B.

Lycka till!

Del A

01 **Logik**

a) Ange symboler och sanningstabeller för följande logiska operatorer:

i) konjunktion ii) implikation

b) Bevisa följande logiska ekvation med hjälp av sanningstabeller. Skriv en kolumn för varje deluttryck.

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

c) Avgör om uttrycken är tautologier, kontradiktioner eller ingendera.

i) $(p \to q) \wedge p \to q$ ii) $(p \to q) \wedge (p \to q)$

02 **Mängdlära**

a) Givet mängden $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Avgör om påståendena är sanna eller falska.

i) $6 \in A$ iii) $8 \notin A$ v) $\varnothing \subseteq A$

ii) $A \subseteq A$ iv) $\varnothing \in A$ vi) $|A| = 8$

b) Rita venndiagrammet för operationen $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

c) Följande funktioner har $\mathbb{R}$ (mängden av alla reella tal) som definitionsmängd och målmängd. Ringa in alla egenskaper som respektive funktion har.

i) $f(x) = 2x$

Funktionen är: injektiv surjektiv bijektiv inget av dessa

ii) $f(x) = x^2$

Funktionen är: injektiv surjektiv bijektiv inget av dessa

03 **Rekursion och induktion**

a) Beräkna summan av de 25 första termerna i den aritmetiska talföljd som beskrivs av formeln $a_n = 6n + 2$. Använd formeln för aritmetiska summor.

b) Visa med hjälp av induktion att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$. Redovisa utförligt (induktionsbas, induktionsantagande, induktionssteg)!

$$\sum_{i=1}^{n}(2i - 1) = n^2$$

04 **Talteori**

a) Ange alla (positiva) delare till talet 40. Ringa in de delare som är primtal.

b) Beräkna kvoten k och resten r vid följande divisioner.

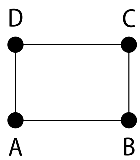
i) $\frac{53}{6}$ ii) $\frac{3}{4}$ iii) $\frac{225}{9}$

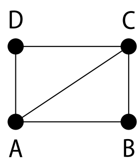
c) Bestäm största gemensamma delaren till talen 238 och 510.

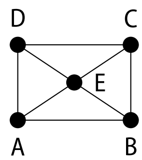
05 **Grafteori**

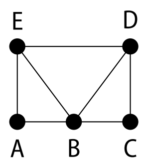
a) När man summerar alla gradtal i en viss oriktad graf får man värdet 84. Hur många bågar har grafen?

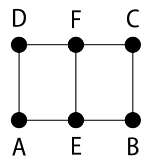
b) Visa hur en Eulerväg eller en Eulerkrets genom grafen kan se ut (ange sekvensen av de noder den besöker) eller skriv ”finns ej”.

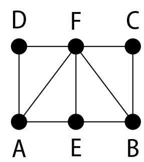
i) 

ii) 

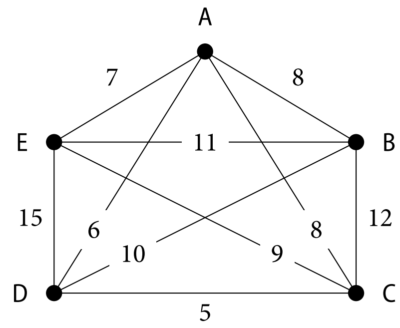
iii) 

iv) 

v) 

vi) 

c) Ange den Hamiltoncykel som man får när man börjar i nod A och använder närmaste granne-metoden. Ange även cykelns totalkostnad.



06 **Kombinatorik och sannolikhetslära**

Svara med ett konkret tal. Redovisa hur du räknat.

a) Hur många tresiffriga koder kan man skapa om varje kod skapas med hjälp av siffrorna 0 till och med 9 och alla siffror i koden ska vara olika?

b) I en e-butik kan man välja mellan 5 olika tillbehör när man konfigurerar sin dator. Hur många konfigurationer kan man skapa med 3 olika tillbehör?

c) I en mojängfabrik tillverkas 40% av mojängerna vid maskin A och de övriga vid maskin B. Maskinerna tillverkar en viss andel defekta mojänger; denna andel är 3% för maskin A och 6% för maskin B. En kund påträffar en defekt mojäng. Vad är sannolikheten att den har tillverkats vid maskin B?

Del B

07 **Att visa olikheter med induktion**

Visa med hjälp av induktion att $2^n > 4n$ för alla tillräckligt stora naturliga tal n. Vad betyder ”tillräckligt stora” i det här sammanhanget? Redovisa utförligt (induktionsbas, induktionsantagande, induktionssteg).

08 **Eratosthenes såll**

Den klassiska metoden för att hitta primtal är en algoritm som heter *Eratosthenes såll*: Man börjar med att lista alla heltal från och med 2 till och med ett största tal n. Sedan fortsätter man i ett antal omgångar där man i varje omgång markerar det minsta talet som finns kvar i listan som primtal och stryker alla multipler av det just markerade talet, förutom talet själv. (En del av dessa må redan vara strukna.) På det viset sållar man så småningom bort alla tal som *inte* är primtal.

a) Använd Eratosthenes såll för att finna alla primtal upp till och med 100. (Det finns 25 stycken sådana primtal.)

b) Ett Mersenneprimtal är ett primtal av typen $m = 2^p - 1$, där p är ett annat primtal. Ange alla Mersenneprimtal upp till och med 100.

c) När man i Eratosthenes såll stryker alla multipler av det senast markerade primtalet p räcker det att börja med talet p^2. Förklara varför.

09 **Handskakningslemmat**

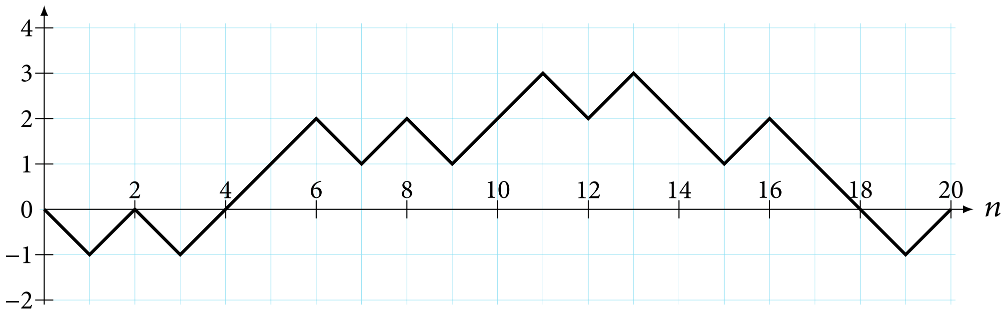
a) Visa att summan av nodernas gradtal i en graf alltid är ett jämnt tal.

b) Visa att på en fest, med godtyckligt antal besökare, är antalet personer som skakat hand med ett udda antal personer på festen ett jämnt tal.

c) En graf kallas *reguljär* om varje nod har samma grad. En reguljär graf i vilken alla noder har grad k kallas *k-reguljär*. Rita en 0-reguljär, en 1-reguljär och en 2-reguljär graf med 6 noder. Hur många bågar har en graf som är 10-reguljär och har 100 noder?

10 Vandringar i ett koordinatsystem

Du ”vandrar omkring” i ett koordinatsystem genom att börja i origo och i varje steg antingen gå ”till höger och uppåt” eller ”till höger och neråt”. Så här t.ex. skulle en vandring med 20 steg kunna se ut:



En vandring som slutar på nollinjen kallas *balanserad*; vandringen i bilden är ett exempel på en balanserad vandring. Man inser att en vandring kan vara balanserad endast om antalet steg är ett jämnt tal, dvs. ett tal på formen $n = 2m$ där $m \geq 0$.

a) Hur många balanserade vandringar finns det med $2m$ steg? Härled en formel.

b) En vandrings *underskott* är antalet steg ”till höger och neråt” som den gör till en punkt under nollinjen. Underskottet för exempelvandringen är 3. Man kan visa att om man delar in alla balanserade vandringarna efter vilket underskott de har, så finns det lika många vandringar i varje delmängd. Använd denna information för att härleda en formel för antalet balanserade vandringar som har $2m$ steg och underskott 0. Ledning: Vad är det minsta möjliga underskottet som en balanserad vandring med $2m$ steg kan ha? Vad är det största möjliga underskottet?

c) Antag att du i varje steg väljer hur du vill gå genom att singla slant. Härled formler för sannolikheten att gå en balanserad vandring och för att gå en balanserad vandring med underskott 0. (Din formel ska ta hänsyn till alla möjliga balanserade vandringar, inte avse sannolikheten för en specifik vandring.)