TDP015 Grunder i matematik och logik (2016)

Tentamen 2016-10-18

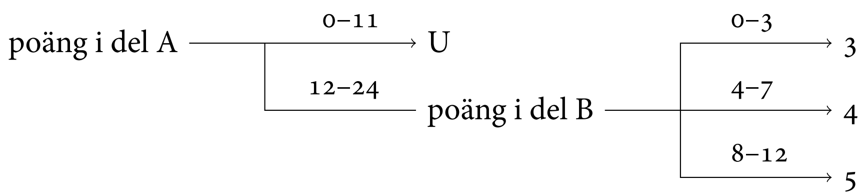
Examinator: Marco Kuhlmann

Denna tentamen består av två delar, A och B. Varje del omfattar ett antal frågor som var och en är värd 3 poäng.

Del A omfattar 8 frågor (värda 24 poäng) som kan besvaras mycket kortfattat, om inget annat anges. Varje fråga är uppdelad i tre delar, ordnade i stigande svårighetsgrad. Det krävs minst 12 poäng på denna del för att del B ska rättas.

Del B omfattar 4 frågor (värda 12 poäng) som kräver utförliga redovisningar med relevant matematisk notation. Frågorna är ordnade i stigande svårighetsgrad.

Betyget på tentamen sätts enligt följande schema:



Lycka till!

Del A

01 Logik

1. Ange sanningstabellen för disjunktion.
2. Bevisa följande med hjälp av sanningstabeller. Redovisa steg för steg.

$$p \wedge \neg p = \neg(q \vee \neg q)$$

3. Ställ upp sanningstabellen för uttrycket $p \rightarrow q$. Ange ett annat uttryck som har samma sanningstabell och som inte använder implikation.

02 Mängdlära

1. Rita venndiagrammet för operationen $A \cap B$.
2. Låt $A = \{2, 4, 6, 8\}$ och $B = \{3, 6, 9\}$. Beräkna $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
3. Ange två oändliga mängder A och B som uppfyller villkoret att $A \setminus B = A$.

03 Funktioner och relationer

Vi skriver $\mathbb{R}$ för mängden av alla reella tal.

1. Vilka av följande egenskaper har den vanliga kvadreringsfunktionen, sedd som en funktion med definitionsmängd och målmängd $\mathbb{R}$?

   injektiv   surjektiv   bijektiv   inga av dessa

2. Vilka av följande egenskaper har den vanliga ”större än eller lika med”-relationen, sedd som en relation på $\mathbb{R}$?

   reflexiv   symmetrisk   antisymmetrisk   transitiv   inga av dessa

3. Ange två transitiva relationer vars union inte är transitiv. Visa detta genom att ange ett motexempel.

04 Rekursion och induktion

Visa med hjälp av induktion att följande likhet gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$. Redovisa utförligt (induktionsbas, induktionsantagande, induktionssteg).

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$$

05 Delbarhet och primtal

1. Ange alla (positiva) delare till talet 56. Ringa in de delare som är primtal.
2. Python använder operatorn `%` för moduloräkning. Beräkna:
   a) `(7 + 7) % 7`
   b) `(5 + 5) % 7`
   c) `(3 + 3) % 7`
3. Ange den största gemensamma delaren till 123 och 321. Redovisa hur du räknat.

06 Grafer

En riktad graf $G = (V, E)$ är given genom följande mängder:

$$V = \{1, 2, 3, 4\} \qquad E = \{\, (x, y) \in V \times V \mid x < y \,\}$$

1. Rita grafen med prickar och pilar.
2. Hur många bågar måste man som minst ta bort från grafen för att göra den osammanhängande?
3. Hur många olika riktade grafer finns det som har 4 noder?

07 Kombinatorik

Svara genom att ange ett konkret tal. Redovisa hur du räknade.

1. Hur många olika sätt finns det att lägga 4 kulor med olika färger – blå, grön, gul, röd – i en rad?
2. I en pizzeria kan man välja mellan 5 olika tillbehör till pizzorna. Hur många pizzor kan man baka med 3 olika tillbehör?
3. En kompis berättar för dig att hen har en jättebra PIN-kod: alla fyra siffror är olika! Hur många procent av alla PIN-koder har denna egenskap?

08 Sannolikhetslära

Planeten Zebulon befolkas av abianer och bebianer. 40% av befolkningen är abianer, och 20% av dessa har lila öron. Andelen bebianer med lila öron är dubbelt så högt.

1. Rita ett träddiagram för denna fråga och för in alla relevanta sannolikheter i det.
2. En av planetens invånare blir slumpmässigt utvald. Vad är sannolikheten för att den har lila öron? Svara genom att ange ett procenttal. Visa hur du räknat.
3. Antag att den utvalda individen har lila öron. Vad är sannolikheten att den är abianer? Svara genom att ange ett procenttal. Visa hur du räknat.

Del B

09 Induktionsbevis av olikheter

Visa med hjälp av induktion att följande gäller för nästan alla naturliga tal n. Vad betyder ”nästan alla” i det här sammanhanget? Redovisa utförligt (induktionsbas, induktionsantagande, induktionssteg).

$$n! > 2^n$$

10 Fruktkorgar

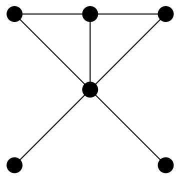
Följande formel ger antalet möjliga sätt att välja k element ur en mängd med n element med repetition och utan hänsyn till ordning:

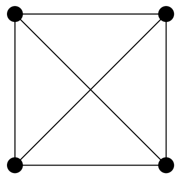
$$\binom{n+k-1}{k}$$

1. Visa att denna formel även ger antalet möjliga sätt att välja $n-1$ element ur en mängd med $n+k-1$ element utan repetition och utan hänsyn till ordning.
2. Peter säljer fruktkorgar med apelsiner, bananer och päron. Hur många olika korgar kan han komponera om det ska vara 6 stycken frukt i varje korg?
3. Hur många blir det om varje korg ska innehålla minst en frukt av varje sort?

11 Eulers polyederformel[1]

Här nedanför har vi ritat två grafer.



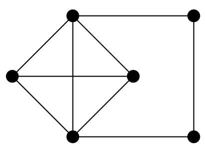


I den högra grafen finns det ett ställe där två bågar korsar varandra, utan att det finns en nod där. Den vänstra grafen innehåller ingen sådan korsning. En sammanhängande graf som kan ritas utan korsningar kallas *plan sammanhängande graf*. Den vänstra grafen är alltså en sådan graf medan den högra grafen inte är det.

För plana sammanhängande grafer gäller *Eulers polyederformel*. Denna formel visar på ett samband mellan antalet noder, bågar och ytor i sådana grafer. Med en *yta* menar vi här ett område som helt omsluts av ett antal bågar. Även området utanför grafen räknas som en yta. Om vi kallar antalet noder för N, antalet bågar för B och antalet ytor för Y så säger Eulers polyederformel att

$$N - B + Y = 2\,.$$

1. Rita en plan sammanhängande graf med 5 noder och 4 ytor.
2. Leonard undersöker grafen här nedan. Han ser att grafen har 6 noder, 9 bågar och 6 ytor. Förbryllad konstaterar han att Eulers polyederformel inte verkar stämma. Förklara för Leonard varför han har fel.

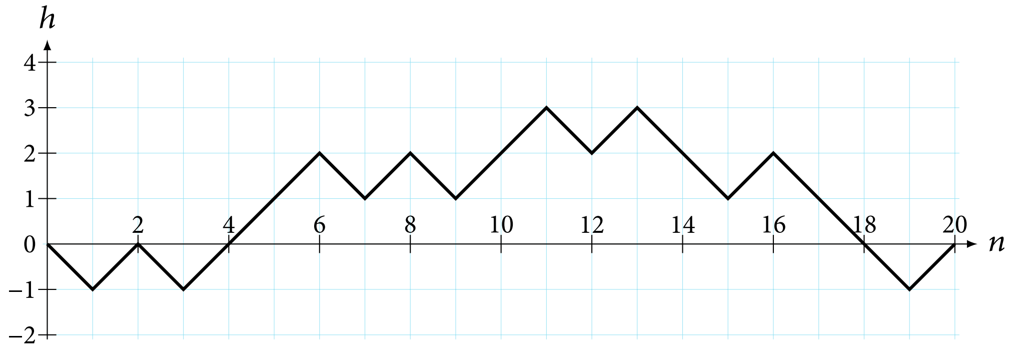


3. Bevisa att Eulers polyederformel gäller för alla plana sammanhängande grafer. Använd induktion över det totala antalet noder och bågar. Induktionsbasen blir således den enklast tänkbara plana sammanhängande grafen, som har en nod och inga bågar. I induktionssteget ska du undersöka vad som händer när man lägger till antingen en ny nod eller en ny båge.

[1] Anpassad efter Szabo et al., *Matematik Origo 5*, Sanoma Utbildning 2013, sida 89–91.

12 Slumpvandringar

Antag att du ”vandrar omkring” i ett koordinatsystem på följande sätt: Du börjar i origo och singlar slant. Om det blir krona så går du ett steg ”till höger och uppåt”; om det blir klave så går du ett steg ”till höger och neråt”. Sedan singlar du slant igen och tar nästa steg, och fortsätter på det viset tills det blir alltför tråkigt. Så här t.ex. skulle en vandring med 20 steg kunna se ut:



Du gör en vandring och vill veta: ”Hur sannolikt är det att jag kommer att avsluta min vandring på nollinjen, som i exemplet ovan?”

1. Hur många olika vandringar finns det som slutar på nollinjen? Härled en formel för vandringar med n steg. Ledning: Skilj mellan två fall.
2. Förklara varför alla vandringar med ett givet antal steg är lika sannolika. Härled en formel som ger sannolikheten för en vandring med n steg.
3. Härled en formel som ger sannolikheten för att en vandring med n steg slutar på nollinjen. Beräkna formelns värde för en vandring med 6 steg.