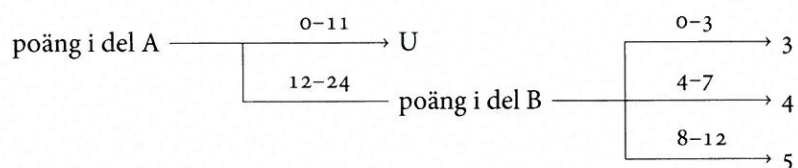


Tentamen 2015-10-20

Marco Kuhlmann

Denna tentamen består av två delar: del A, som innehåller uppgifter 1–8, och del B, som innehåller uppgifter 9–12. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betyget sätts enligt följande schema:



Dina inlämningar till del B kommer endast att rättas om du har minst 12 poäng i del A. Rättningen av del A kommer då att avbrytas.

Lycka till!

Del A

1. Ange sanningstabeller för följande logiska formler:

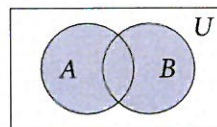
(a) $p \vee \neg p$

(b) $\neg(p \wedge q)$

(c) $\neg p \vee q$

2. Låt A och B vara delmängder till ett gemensamt universum U . Mängdoperationer kan beskrivas med hjälp av mängdbyggare och Venn-diagram. Tag union som exempel:

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$$



Ange motsvarande definitioner och Venn-diagram för följande mängdoperationer. Använd endast \in och \notin och de logiska operatorerna konjunktion, disjunktion och negation.

(a) $A \cap B$

(b) $(A \cap B)^c$

(c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

3. Undersök i varje fall om relationen är (i) reflexiv, (ii) symmetrisk, (iii) antisymmetrisk, (iv) transitiv. Ange antingen ett kort bevis (om relationen har egenskapen) eller ett motexempel (om relationen inte har egenskapen).

(a) $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a < b\}$

(b) $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a = b\}$

(c) $R_3 = R_1 \cup R_2$

4. Bevisa följande utsaga med hjälp av induktion. Redovisa utförligt. Glöm inte att tydligt markera var i beviset du använder induktionsantagandet.

$$\text{För alla } n \in \mathbb{N} \text{ gäller att } \sum_{i=1}^n i = \frac{n^2 + n}{2}.$$

5. Ange en rekursiv definition för Euklides algoritm. Hitta sedan två tal a och b sådana att $\gcd(a, b) = 6$ och Euklides algoritm behöver fyra rekursiva anrop för räkna ut denna största gemensamma delare. Ange alla rekursiva anrop.

6. Ett svenskt registreringsskylt består i princip av tre bokstäver ur det svenska alfabetet (29 bokstäver) följt av tre siffror mellan 0 och 9.

(a) Hur många olika registreringsskyltar finns det? (Bortse från faktumet att vissa bokstäver och bokstavskombinationer inte används.)

(b) Eftersom kombinationerna börjar ta slut funderar man på att även tillåta bokstäver på sista positionen. Hur många nya kombinationer skulle detta ge?

(c) Hur många olika registreringsskyltar (utan en bokstav i sista positionen) skulle det finnas om inget skylt fick ha samma bokstav eller siffra två gånger i rad?

Ange i varje fall ett uttryck för att räkna ut svaret. Du behöver inte förenkla uttrycket.

7. Vi definierar en riktad graf enligt följande: Grafens noder är de fem första naturliga talen. Det finns en båge från en nod a till en nod b om $a > b$.

(a) Hur många kanter har grafen?

(d) Ange utgraden hos nod 3.

(b) Ange en enkel väg med längd 3.

(e) Är grafen sammanhängande?

(c) Ange ingraden hos nod 3.

(f) Är grafen starkt sammanhängande?

Tips: Börja med att rita grafen!

8. I en möjängfabrik tillverkas 40% av möjängerna vid maskin 1 och de övriga vid maskin 2. Maskinerna tillverkar en viss andel defekta möjänger; denna andel är 3% för maskin 1 och 6% för maskin 2.
- (a) Översätt uppgifterna till sannolikheter. Använd händelserna M_1 "møjängen tillverkas vid maskin 1", M_2 "møjängen tillverkas vid maskin 2" och D "møjängen är defekt".
 - (b) Hur stor är sannolikheten att en slumpmässigt vald möjäng är defekt? Ange resultatet i decimalform. Motivera ditt svar.
 - (c) En kund påträffar en defekt möjäng. Hur stor är sannolikheten att den har tillverkats vid maskin 2? Ange resultatet i decimalform. Motivera ditt svar.

Del B

Svara utförligt!

9. Visa att $2^n > n^2$ för alla naturliga tal $n > 4$.
10. Låt $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. En *binär logisk operator* är en funktion $f: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$. Exempel på binära logiska operatorer är konjunktion, disjunktion och implikation.
- (a) Hur många olika binära logiska operatorer finns det?
 - (b) Betrakta följande Python-funktion:

```
def nor(x, y): return not (x or y)
```

Visa att varje binär logisk operator kan implementeras genom en Python-funktion som endast anropar funktionen `nor`. Disjunktion t.ex. kan implementeras så här:

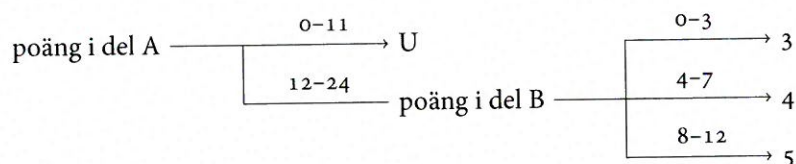
```
def disj(x, y): return nor(nor(x, y), nor(x, y))
```

När du har definierat en funktion får du använda den för att definiera nya funktioner. Tips: Börja med att definiera en hjälpfunktion `neg` som tar ett argument och returnerar dess negation.
11. Bevisa att det finns oändligt många primtal.
12. En *polyedergraf* är en sammanhängande (oriktad) graf som kan ritas på ett sådant sätt att inga kanter korsar varandra. Kanterna i en sådan graf delar planet som den ritas på i ett antal områden, som vi ska kalla *ytor*. Vi betraktar även området utanför grafen som en yta. Vi skall beteckna antalet ytor med Y , antalet hörn med H och antalet kanter med K .
- (a) Rita en polyedergraf med fyra hörn och sex kanter. Ange antalet ytor för din graf.
 - (b) Bevisa *Eulers polyederformel*, som säger att för varje polyedergraf så gäller sambandet $Y = K - H + 2$. Använd induktion över det totala antalet hörn och kanter.

Tentamen 2015-08-21

Marco Kuhlmann

Denna tentamen består av två delar: del A, som innehåller uppgifter 1–8, och del B, som innehåller uppgifter 9–12. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betyget sätts enligt följande schema:



Dina inlämningar till del B kommer endast att rättas om du har minst 12 poäng i del A. Rättningen av del A kommer då att avbrytas.

Lycka till!

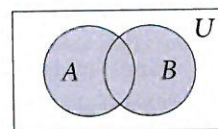
Del A

1. Ange symboler och sanningstabeller för följande logiska operatorer:

- (a) negation (b) konjunktion (c) implikation

2. Låt A och B vara delmängder till ett gemensamt universum U . Mängdoperationer kan beskrivas med hjälp av mängdbyggare och Venn-diagram. Tag union som exempel:

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$$



Ange motsvarande definitioner och Venn-diagram för följande mängdoperationer. Använd endast \in och \notin och de logiska operatorerna konjunktion, disjunktion och negation.

- (a) $A \cap B$ (b) $(A \cup B)^c$ (c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

3. Undersök i varje fall om relationen är (i) reflexiv, (ii) symmetrisk, (iii) antisymmetrisk, (iv) transitiv. Ange antingen ett kort bevis (om relationen har egenskapen) eller ett motexempel (om relationen inte har egenskapen).

(a) $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a < b\}$

(b) $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a = b\}$

(c) $R_3 = R_1 \cup R_2$

4. Bevisa följande utsaga med hjälp av induktion. Redovisa utförligt. Glöm inte att tydligt markera var i beviset du använder induktionsantagandet.

För alla $n \in \mathbb{N}$ gäller att
$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n^2 + n}{2}.$$

5. Ange en rekursiv definition för Euklides algoritm och använd den för att bestämma den största gemensamma delaren av 715 och 297. Ange alla rekursiva anrop.
6. Ett svenskt registreringsskylt består av tre bokstäver ur det svenska alfabetet (som består av 29 bokstäver) följda av tre siffror (mellan 0 och 9).
- (a) Hur många olika registreringsskyltar finns det? (Bortse från att vissa bokstäver och bokstavskombinationer inte används.)
- (b) Hur många olika registreringsskyltar skulle det finnas om varje bokstav och varje siffra fick förekomma endast en enda gång på en skylt?
- (c) Eftersom kombinationerna börjar ta slut funderar man på att även tillåta bokstäver på sista positionen. Med vilken faktor skulle antalet möjliga kombinationer öka då? Ange i varje fall ett uttryck för att räkna ut svaret. Du behöver inte förenkla uttrycket.
7. Vi definierar en riktad graf $G = (V, E)$ genom följande mängder:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad E = \{(a, b) \in V \times V : a > b\}$$

- (a) Hur många kanter har grafen? (d) Ange utgraden hos nod 4.
- (b) Ange en enkel väg med längd 3. (e) Är grafen sammanhängande?
- (c) Ange ingraden hos nod 4. (f) Är grafen starkt sammanhängande?

Tips: Börja med att rita grafen!

8. I en möjängfabrik tillverkas 40% av möjängerna vid maskin 1 och de övriga vid maskin 2. Maskinerna tillverkar en viss andel defekta möjänger; denna andel är 3% för maskin 1 och 6% för maskin 2.
- (a) Översätt uppgifterna till sannolikheter. Använd händelserna M_1 "møjängen tillverkas vid maskin 1", M_2 "møjängen tillverkas vid maskin 2" och D "møjängen är defekt".
- (b) Hur stor är sannolikheten att en slumpmässigt vald möjäng är defekt? Ange resultatet i decimalform. Motivera ditt svar.
- (c) En kund påträffar en defekt möjäng. Hur stor är sannolikheten att den har tillverkats vid maskin 2? Ange resultatet i decimalform. Motivera ditt svar.

Del B

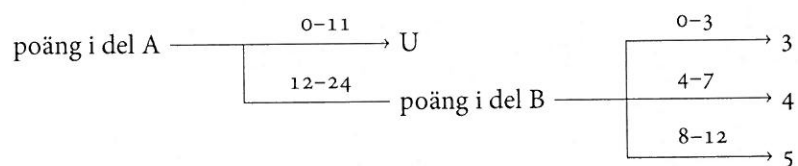
Svara utförligt!

9. Visa att $2^n > n^2$ för alla naturliga tal $n > 4$.
10. Låt $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. En *binär logisk operator* är en funktion $f: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$. Exempel på binära logiska operatorer är konjunktion, disjunktion och implikation.
- (a) Hur många olika binära logiska operatorer finns det?
- (b) Betrakta följande Python-funktion:
- ```
def nand(x, y): return not (x and y)
```
- Visa att varje binär logisk operator kan implementeras genom en Python-funktion som endast anropar funktionen nand. Disjunktion t.ex. kan implementeras så här:
- ```
def disj(x, y): return nand(nand(x, x), nand(y, y))
```
- När du har definierat en funktion får du använda den för att definiera nya funktioner. Tips: Börja med att definiera en hjälpfunktion neg som tar ett argument och returnerar dess negation.
11. Bevisa att det finns oändligt många primtal.
12. En *polyedergraf* är en sammanhängande (oriktad) graf som kan ritas på ett sådant sätt att inga kanter korsar varandra. Kanterna i en polyedergraf delar planet i ett antal områden, som vi ska kalla *ytor*. Man betraktar även området utanför grafen som en yta.
- (a) Rita en polyedergraf med fyra hörn och sex kanter. Ange antalet ytor för din graf.
- (b) Beteckna antalet ytor med Y , antalet hörn med H och antalet kanter med K . Bevisa att följande (*Eulers polyederformel*) gäller för alla polyedergrafer: $Y + H - K = 2$. Använd induktion över det totala antalet hörn och kanter.

Tentamen 2015-06-01

Marco Kuhlmann

Denna tentamen består av två delar: del A, som innehåller uppgifter 1–8, och del B, som innehåller uppgifter 9–12. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betyget sätts enligt följande schema:



Dina inlämningar till del B kommer endast att rättas om du har minst 12 poäng i del A. Rättningen av del A kommer då att avbrytas.

Lycka till!

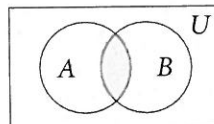
Del A

1. Ange symboler och sanningstabeller för följande logiska operatorer:

- (a) negation (b) disjunktion (c) implikation

2. Låt A och B vara delmängder till ett gemensamt universum U . Mängdoperationer kan beskrivas med hjälp av mängdbyggare och Venn-diagram. Tag snitt som exempel:

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$$



Ange motsvarande definitioner och Venn-diagram för följande mängdoperationer. Använd endast \in och \notin och de logiska operatorerna konjunktion, disjunktion och negation.

- (a) $A \cup B$ (b) $A^c \setminus B$ (c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

3. Undersök i varje fall om relationen är (i) reflexiv, (ii) symmetrisk, (iii) antisymmetrisk, (iv) transitiv. Ange antingen ett kort bevis (om relationen har egenskapen) eller ett motexempel (om relationen inte har egenskapen).

(a) $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a < b\}$

(b) $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a = b\}$

(c) $R_3 = R_1 \cup R_2$

4. Bevisa följande utsaga med hjälp av induktion. Redovisa utförligt. Glöm inte att tydligt markera var i beviset du använder induktionsantagandet.

För alla $n \in \mathbb{N}$ gäller att $\sum_{i=1}^n 2i = n^2 + n$.

5. Ange en rekursiv definition för Euklides algoritmen och använd den för att bestämma den största gemensamma delaren av 693 och 286. Ange alla rekursiva anrop.
6. Ett svenskt registreringsskylt består i princip av tre bokstäver ur det svenska alfabetet följt av tre siffror mellan 0 och 9; det finns dock 6 bokstäver (I, Q, V, Å, Ä, Ö) och 90 trebokstavskombinationer (t.ex. DUM, FUL, RAP) som inte används.
- (a) Hur många olika registreringsskyltar skulle det finnas om man fick använda alla bokstäver och alla trebokstavskombinationer?
- (b) Hur många olika registreringsskyltar skulle det finnas om man fick göra som i (a), men varje bokstav och varje siffra fick förekomma endast en enda gång?
- (c) Hur många olika registreringsskyltar finns det i verkligheten, dvs. när man tar hänsyn till de oanvända bokstäverna och trebokstavskombinationerna?

Ange i varje fall ett uttryck för att räkna ut svaret. Du behöver inte förenkla uttrycket.

7. Vi definierar en riktad graf $G = (V, E)$ genom följande mängder:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad E = \{(a, b) \in V \times V : a < b\}$$

- (a) Hur många kanter har grafen? (d) Ange utgraden hos nod 3.
- (b) Ange en enkel väg från 1 till 3. (e) Är grafen sammanhängande?
- (c) Ange ingraden hos nod 3. (f) Innehåller grafen en cykel?

Tips: Börja med att rita grafen!

8. I ett laboratorium har en sensor installerats som ska slå larm om rumsluften innehåller för mycket kolmonoxid. Om gashalten är för hög slår sensorn larm med 99% säkerhet; men det finns en chans på 2% att sensorn slår larm trots att gashalten är normal. Gränsvärdena för kolmonoxid överskrids i genomsnitt 3 dagar per år (= 365 dagar).
- (a) Översätt uppgiftstexten till sannolikheter. Använd händelserna L "sensorn slår larm" och K "luften innehåller för mycket kolmonoxid".
 - (b) Hur stor är sannolikheten att sensorn slår larm en vanlig dag? Ange resultatet som ett bråkital. Motivera ditt svar.
 - (c) Om sensorn slår larm, hur stor är då sannolikheten att luften faktiskt innehåller för mycket kolmonoxid? Ange resultatet som ett bråkital. Motivera ditt svar.

Del B

Svara utförligt!

9. Visa att $2^n < n!$ för alla naturliga tal $n > 3$.
10. Låt $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. En *binär logisk operator* är en funktion $f: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$. Exempel på binära logiska operatorer är konjunktion, disjunktion och implikation.
- (a) Hur många olika binära logiska operatorer finns det?
 - (b) Följande Python-funktion implementerar konjunktion:

```
def f(x, y): return x and y
```

Ange motsvarande Python-funktioner för alla möjliga binära logiska operatorer. De enda reserverade orden som får förekommer till höger om return är and och not.
11. Låt $G = (V, E)$ vara en riktad graf.
- (a) Visa att om G är acyklisk så är E antisymmetrisk.
 - (b) Låt $E_1, E_2 \subseteq V \times V$. Visa eller motbevisa: (i) Om E_1 och E_2 är antisymmetriska så även $E_1 \cap E_2$. (ii) Om E_1 och E_2 är antisymmetriska så även $E_1 \cup E_2$.
12. Bevisa att det finns oändligt många primtal.

