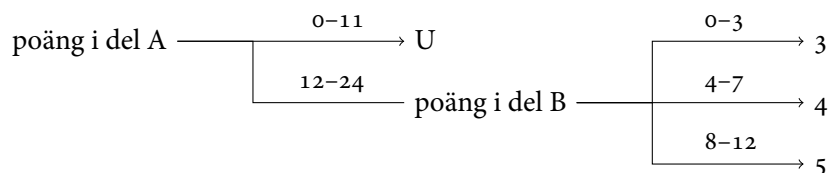


## Tentamen 2015-10-20

Marco Kuhlmann

Denna tentamen består av två delar: del A, som innehåller uppgifter 1–8, och del B, som innehåller uppgifter 9–12. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betyget sätts enligt följande schema:



Dina inlämningar till del B kommer endast att rättas om du har minst 12 poäng i del A. Rättningen av del A kommer då att avbrytas.

**Lycka till!**

### Del A

1. Ange sanningstabeller för följande logiska formler:

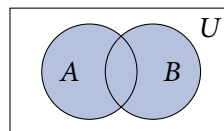
(a)  $p \vee \neg p$

(b)  $\neg(p \wedge q)$

(c)  $\neg p \vee q$

2. Låt  $A$  och  $B$  vara delmängder till ett gemensamt universum  $U$ . Mängdoperationer kan beskrivas med hjälp av mängdbyggare och Venn-diagram. Tag union som exempel:

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$$



Ange motsvarande definitioner och Venn-diagram för följande mängdoperationer. Använd endast  $\in$  och  $\notin$  och de logiska operatorerna konjunktion, disjunktion och negation.

(a)  $A \cap B$

(b)  $(A \cap B)^c$

(c)  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

3. Undersök i varje fall om relationen är (i) reflexiv, (ii) symmetrisk, (iii) antisymmetrisk, (iv) transitiv. Ange antingen ett kort bevis (om relationen har egenskapen) eller ett motexempel (om relationen inte har egenskapen).

(a)  $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a < b\}$

(b)  $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a = b\}$

(c)  $R_3 = R_1 \cup R_2$

4. Bevisa följande utsaga med hjälp av induktion. Redovisa utförligt. Glöm inte att tydligt markera var i beviset du använder induktionsantagandet.

$$\text{För alla } n \in \mathbb{N} \text{ gäller att } \sum_{i=1}^n i = \frac{n^2 + n}{2}.$$

5. Ange en rekursiv definition för Euklides algoritm. Hitta sedan två tal  $a$  och  $b$  sådana att  $\gcd(a, b) = 6$  och Euklides algoritm behöver fyra rekursiva anrop för räkna ut denna största gemensamma delare. Ange alla rekursiva anrop.

6. Ett svenskt registreringsskylt består i princip av tre bokstäver ur det svenska alfabetet (29 bokstäver) följt av tre siffror mellan 0 och 9.

- (a) Hur många olika registreringsskyltar finns det? (Bortse från faktumet att vissa bokstäver och bokstavskombinationer inte används.)
- (b) Eftersom kombinationerna börjar ta slut funderar man på att även tillåta bokstäver på sista positionen. Hur många nya kombinationer skulle detta ge?
- (c) Hur många olika registreringsskyltar (utan en bokstav i sista positionen) skulle det finnas om inget skylt fick ha samma bokstav eller siffra två gånger i rad?

Ange i varje fall ett uttryck för att räkna ut svaret. Du behöver inte förenkla uttrycket.

7. Vi definierar en riktad graf enligt följande: Grafens noder är de fem första naturliga talen. Det finns en båge från en nod  $a$  till en nod  $b$  om  $a > b$ .

- (a) Hur många kanter har grafen? (d) Ange utgraden hos nod 3.
- (b) Ange en enkel väg med längd 3. (e) Är grafen sammanhängande?
- (c) Ange ingraden hos nod 3. (f) Är grafen starkt sammanhängande?

Tips: Börja med att rita grafen!

8. I en möjängfabrik tillverkas 40% av möjängerna vid maskin 1 och de övriga vid maskin 2. Maskinerna tillverkar en viss andel defekta möjänger; denna andel är 3% för maskin 1 och 6% för maskin 2.
- (a) Översätt uppgifterna till sannolikheter. Använd händelserna  $M_1$  ”møjängen tillverkas vid maskin 1”,  $M_2$  ”møjängen tillverkas vid maskin 2” och  $D$  ”møjängen är defekt”.
- (b) Hur stor är sannolikheten att en slumpmässigt vald möjäng är defekt? Ange resultatet i decimalform. Motivera ditt svar.
- (c) En kund påträffar en defekt möjäng. Hur stor är sannolikheten att den har tillverkats vid maskin 2? Ange resultatet i decimalform. Motivera ditt svar.

## Del B

Svara utförligt!

9. Visa att  $2^n > n^2$  för alla naturliga tal  $n > 4$ .
10. Låt  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ . En *binär logisk operator* är en funktion  $f : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ . Exempel på binära logiska operatorer är konjunktion, disjunktion och implikation.
- (a) Hur många olika binära logiska operatorer finns det?
- (b) Betrakta följande Python-funktion:
- ```
def nor(x, y): return not (x or y)
```
- Visa att varje binär logisk operator kan implementeras genom en Python-funktion som endast anropar funktionen `nor`. Disjunktion t.ex. kan implementeras så här:
- ```
def disj(x, y): return nor(nor(x, y), nor(x, y))
```
- När du har definierat en funktion får du använda den för att definiera nya funktioner. Tips: Börja med att definiera en hjälpfunktion `neg` som tar ett argument och returnerar dess negation.
11. Bevisa att det finns oändligt många primtal.
12. En *polyedergraf* är en sammanhängande (oriktad) graf som kan ritas på ett sådant sätt att inga kanter korsar varandra. Kanterna i en sådan graf delar planet som den ritas på i ett antal områden, som vi ska kalla *ytor*. Vi betraktar även området utanför grafen som en yta. Vi skall beteckna antalet ytor med  $Y$ , antalet hörn med  $H$  och antalet kanter med  $K$ .
- (a) Rita en polyedergraf med fyra hörn och sex kanter. Ange antalet ytor för din graf.
- (b) Bevisa *Eulers polyederformel*, som säger att för varje polyedergraf så gäller sambandet  $Y = K - H + 2$ . Använd induktion över det totala antalet hörn och kanter.