Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings universitet

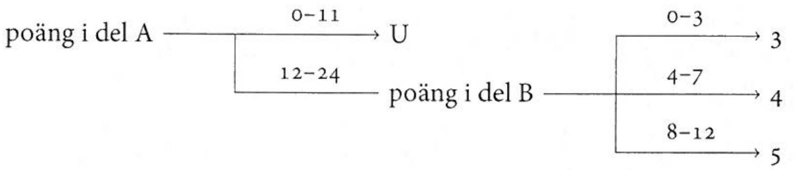
Datum för tentamen	2015-06-01
Sal (1)	TER2
Tid	14-18
Kurskod	TDP015
Provkod	TEN1
Kursnamn/benämning **Provnamn/benämning**	Grunder i matematik och logik Skriftlig tentamen
Institution	IDA
Antal uppgifter som ingår i tentamen	12
Jour/Kursansvarig Ange vem som besöker salen	Marco Kuhlmann
Telefon under skrivtiden	013-284644
Besöker salen ca klockan	15
Kursadministratör/kontaktperson (namn + tfnr + mailaddress)	Åsa Kärrman, 013-285760, asa.karrman@liu.se
Tillåtna hjälpmedel	inga
Övrigt	-/-
Antal exemplar i påsen	

TDP015 Grunder i matematik och logik (2015)

Tentamen 2015-06-01

Marco Kuhlmann

Denna tentamen består av två delar: del A, som innehåller uppgifter 1–8, och del B, som innehåller uppgifter 9–12. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betyget sätts enligt följande schema:



Dina inlämningar till del B kommer endast att rättas om du har minst 12 poäng i del A. Rättningen av del A kommer då att avbrytas.

Lycka till!

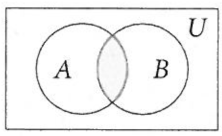
Del A

1. Ange symboler och sanningstabeller för följande logiska operatorer:

   (a) negation (b) disjunktion (c) implikation

2. Låt A och B vara delmängder till ett gemensamt universum U. Mängdoperationer kan beskrivas med hjälp av mängdbyggare och Venn-diagram. Tag snitt som exempel:

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \land x \in B\}$$



Ange motsvarande definitioner och Venn-diagram för följande mängdoperationer. Använd endast $\in$ och $\notin$ och de logiska operatorerna konjunktion, disjunktion och negation.

(a) $A \cup B$ (b) $A^c \setminus B$ (c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

3. Undersök i varje fall om relationen är (i) reflexiv, (ii) symmetrisk, (iii) antisymmetrisk, (iv) transitiv. Ange antingen ett kort bevis (om relationen har egenskapen) eller ett motexempel (om relationen inte har egenskapen).
   (a) $R_1 = \{ (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a < b \}$
   (b) $R_2 = \{ (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a = b \}$
   (c) $R_3 = R_1 \cup R_2$

4. Bevisa följande utsaga med hjälp av induktion. Redovisa utförligt. Glöm inte att tydligt markera var i beviset du använder induktionsantagandet.

   För alla $n \in \mathbb{N}$ gäller att $\sum_{i=1}^{n} 2i = n^2 + n$.

5. Ange en rekursiv definition för Euklides algoritm och använd den för att bestämma den största gemensamma delaren av 693 och 286. Ange alla rekursiva anrop.

6. Ett svenskt registreringsskylt består i princip av tre bokstäver ur det svenska alfabetet följt av tre siffror mellan 0 och 9; det finns dock 6 bokstäver (I, Q, V, Å, Ä, Ö) och 90 trebokstavskombinationer (t.ex. DUM, FUL, RAP) som inte används.
   (a) Hur många olika registreringsskyltar skulle det finnas om man fick använda alla bokstäver och alla trebokstavskombinationer?
   (b) Hur många olika registreringsskyltar skulle det finnas om man fick göra som i (a), men varje bokstav och varje siffra fick förekomma endast en enda gång?
   (c) Hur många olika registreringsskyltar finns det i verkligheten, dvs. när man tar hänsyn till de oanvända bokstäverna och trebokstavskombinationerna?

   Ange i varje fall ett uttryck för att räkna ut svaret. Du behöver inte förenkla uttrycket.

7. Vi definierar en riktad graf $G = (V, E)$ genom följande mängder:

   $$V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad E = \{ (a, b) \in V \times V : a < b \}$$

   (a) Hur många kanter har grafen?
   (b) Ange en enkel väg från 1 till 3.
   (c) Ange ingraden hos nod 3.
   (d) Ange utgraden hos nod 3.
   (e) Är grafen sammanhängande?
   (f) Innehåller grafen en cykel?

   Tips: Börja med att rita grafen!

8. I ett laboratorium har en sensor installerats som ska slå larm om rumsluften innehåller för mycket kolmonoxid. Om gashalten är för hög slår sensorn larm med 99% säkerhet; men det finns en chans på 2% att sensorn slår larm trots att gashalten är normal. Gränsvärdena för kolmonoxid överskrids i genomsnitt 3 dagar per år (= 365 dagar).

(a) Översätt uppgiftstexten till sannolikheter. Använd händelserna L "sensorn slår larm" och K "luften innehåller för mycket kolmonoxid".

(b) Hur stor är sannolikheten att sensorn slår larm en vanlig dag? Ange resultatet som ett bråktal. Motivera ditt svar.

(c) Om sensorn slår larm, hur stor är då sannolikheten att luften faktiskt innehåller för mycket kolmonoxid? Ange resultatet som ett bråktal. Motivera ditt svar.

Del B

Svara utförligt!

9. Visa att $2^n < n!$ för alla naturliga tal $n > 3$.

10. Låt $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. En *binär logisk operator* är en funktion $f : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$. Exempel på binära logiska operatorer är konjunktion, disjunktion och implikation.

(a) Hur många olika binära logiska operatorer finns det?

(b) Följande Python-funktion implementerar konjunktion:

```
def f(x, y): return x and y
```

Ange motsvarande Python-funktioner för alla möjliga binära logiska operatorer. De enda reserverade orden som får förekommer till höger om `return` är `and` och `not`.

11. Låt $G = (V, E)$ vara en riktad graf.

(a) Visa att om G är acylisk så är E antisymmetrisk.

(b) Låt $E_1, E_2 \subseteq V \times V$. Visa eller motbevisa: (i) Om E_1 och E_2 är antisymmetriska så även $E_1 \cap E_2$. (ii) Om E_1 och E_2 är antisymmetriska så även $E_1 \cup E_2$.

12. Bevisa att det finns oändligt många primtal.