

Tentamen  
TDP015  
Grunder i matematik och logik

2011-01-13, 14.00 – 18.00

Tillåtna hjälpmedel:

- Miniräknare

Tänk på:

- Till skillnad från inlämningsuppgifterna ska en tentamensuppgift redovisas komplett och korrekt för att ge full poäng. Vid brister görs poängavdrag.
- Miniräknare kan användas för att räkna ut ett numeriskt värde på ett slutresultat eller för att kontrollera beräkningarna. Alla beräkningar på väg till ett slutresultat måste redovisas. Alla resultat måste motiveras.

Totalt poängantal är 24. Gränser:

3: 12 p, 4: 16 p, 5: 20 p.

*Jour:* Jonas Wallgren

1. (3p)

(En liten påminnelse:  $|x|$  är absolutbeloppet av  $x$ , alltså "positiva värdet" av  $x$ . Ex:  $|4| = 4, |-7.5| = 7.5$ .)

$R$  är en relation på  $\mathbb{R}^2$  sådan att  $(a, b)R(c, d)$  om  $\max(|a|, |b|) = \max(|c|, |d|)$ , där alltså  $\max$  ger det största av två värden.

(a) Bevisa att  $R$  är en ekvivalensrelation

(b) Rita ekvivalensklassen som innehåller  $(2, 2)$  i ett koordinatsystem.

2. (3p)

Är formeln  $(\forall x : (P(x) \rightarrow Q(x))) \leftrightarrow ((\forall x : P(x)) \rightarrow (\forall x : Q(x)))$

- en tautologi
- ibland sann och ibland falsk
- alltid falsk

? Bevisa.

3. (2p)

$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4, a_n = a_{n-1} + 4a_{n-3}$

Beräkna några fler  $a$ -värden för större  $n$  och hitta ett generellt uttryck för värdet på  $a_n$ . Bevisa mha induktion att det uttrycket är korrekt.

4. (2p) Ordna i ökande komplexitetsordning:

$O(10n^3), O((3n)^{10}), O(n \log n), O(\log n), O(\sqrt{\sqrt{n}})$ .

5. (2p)

Beräkna  $\Phi(504)$

6. (3p)

Bestäm två olika transformationer som transformerar

figuren med hörnen i  $(1, 1), (2, 1), (2, 2), (1, 2)$

till figuren med hörnen i  $(-1, -1), (-2, -1), (-2, -2), (-1, -2)$ . Beskriv hur du kommer fram till dem.

7. (2p)

Hur många olika Hamiltoncykler finns det i den graf som består av de 4 hörnen och de 6 kanterna i en tetraeder?

8. (2p)  
Givet att två kort av samma valör är dragna ur en vanlig kortlek med 52 kort. Hur stor är sannolikheten för att det två följande dragna korten har samma valör? (Förtydligande: Först har t.ex. två ess dragits. Därefter vill man dra t.ex två kungar, inte nödvändigtvis två ess till, vilket iofs är tillåtet.)
9. (2p)  
Ekvationen  $x^2 = 2$  ska lösas mha Newton-Raphsons metod. Genomför beräkningen i 3 steg utifrån startvärdet 4.
10. (3p)  
Konstruera en DFA för språket av strängar över  $\{0, 1\}$  sådana att om en sträng innehåller 00 (två nollor i rad) så måste den innehålla 11 (två ettor i rad). Motivera konstruktionen.