Linköpings Universitet
Institutionen för datavetenskap
Peter Jonsson

TDDD20 Konstruktion och analys av algoritmer

Tentamen lördagen den 7:e januari 2017, kl 08.00–13.00.

Hjälpmedel: Kursboken "Introduction to Algorithms" (Cormen, Leiserson, Rivest & Stein). Ordlista.

Poäng: Totalt kan 40 poäng erhållas. För godkänt krävs ca 16 poäng.

Jourhavande lärare: Peter Jonsson, tel 28 24 15 eller 070 773 43 89.

Allmänt: Skriv läsligt. Onödigt komplicerade lösningar kan leda till poängavdrag. Bristfälligt motiverade lösningar leder ofelbart till poängavdrag. Om inte annat anges skall presenterade algoritmer vara körbara på en processor av standardtyp (vilket utesluter exempelvis kvantdatorer och massiv parallellism). Slumpbitar får användas av algoritmer vid behov och de förutsätts kunna genereras i konstant tid.

Uppgifterna i tentamen är inte ordnade efter svårighetsgrad.

Lycka till!

Peter

Uppgift 1. (8p)
Betrakta följande grafproblem:

Indata: Sammanhängande graf G med n noder och m bågar.
Utdata: Alla par av noder x, y sådana att om man tar bort x och y ur G så blir den resulterande grafen ej sammanhängande.

Konstruera en algoritm som löser detta problem i $O(n \cdot m)$ tid. Observera att man kan kontrollera om en graf är sammanhängande i $O(m)$ tid. Alltså kan problemet trivialt lösas i $O(n^2 \cdot m)$ tid.

Uppgift 2. (8p)
En instans av *mängdproblemet* består av en ändlig mängd trippler (x_i, C, x_j) där x_i, x_j är variabler och $C \in \{\subseteq, \mathsf{disj}\}$. Låt $I = \{T_1, \ldots, T_k\}$ vara en godtycklig instans av detta problem över variablerna $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ och låt E vara mängden av alla icke-tomma, ändliga delmängder av de naturliga talen. Vi säger att I har en lösning om och endast om det finns en total funktion f från X till E sådan att

- $f(x_i) \subseteq f(x_j)$ för varje $(x_i, \subseteq, x_j)$ i I; och
- $f(x_i) \cap f(x_j) = \emptyset$ för varje $(x_i, \mathsf{disj}, x_j)$ i I.

Konstruera en polynomisk algoritm som undersöker om en godtycklig instans av mängdproblemet har en lösning.

Uppgift 3. (8p)
Betrakta följande beräkningproblem:

Indata: En mängd intervall[1] $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_n\}$ på den rationella tallinjen där varje intervall I_j, $1 \leq j \leq n$, har en positiv och noll-skild vikt $w(I_j)$.
Utdata: En delmängd $\mathcal{I}'$ av $\mathcal{I}$ som uppfyller följande krav:

1. om $I, J \in \mathcal{I}'$ och $I \neq J$ så gäller att I och J är disjunkta, dvs $I \cap J = \emptyset$, samt
2. $\mathcal{I}'$ har största möjliga totalvikt, dvs. $\sum_{I \in \mathcal{I}'} w(I)$ är så stor som möjligt.

Konstruera en algoritm som löser detta problem i polynomisk tid.

[1]Ett intervall I representeras med ett par av tal (I_s, I_f) där $I_s < I_f$. Antag att både I_s och I_f är positiva heltal.

Uppgift 4. (8p)
En *stig* mellan två noder s, t i en oriktad graf är en väg från s till t som inte passerar någon nod mer än en gång. Betrakta följande problem:

Indata. En oriktad graf $G = (V, E)$, två noder $s, t \in V$ och ett heltal K.
Fråga. Finns det en stig från s till t som innehåller exakt K bågar?

Visa att detta problem är NP-fullständigt.

Uppgift 5. (8p)
Det NP-fullständiga problemet NAE3SAT definieras enligt följande:

Indata. En CNF-formel där varje klausul innehåller exakt tre stycken literaler.
Fråga. Finns det en tilldelning av sanningsvärden till propositionerna sådan att minst en men högst två literaler i varje klausul blir sann?

Eftersom detta problem är beräkningsmässigt svårt (om vi utgår från att P $\neq$ NP) så behövs en approximationsalgoritm för problemet—denna algoritm skall i polynomisk tid konstruera en tilldelning som gör att så många klausuler som möjligt får en korrekt tilldelning (d.v.s. att minst en men högst två literaler i klausulen blir sann). Konstruera en sådan algoritm som ger *minst* 70% av klausulerna en korrekt tilldelning. Algoritmen får vara randomiserad: Då förväntas den ge minst 70% av klausulerna en korrekt tilldelning.