Linköpings Universitet
Institutionen för datavetenskap
Peter Jonsson

TDDD20 Konstruktion och analys av algoritmer

Tentamen fredagen den 28:e oktober 2016, kl 08.00–13.00.

Hjälpmedel: Kursboken "Introduction to Algorithms" (Cormen, Leiserson, Rivest & Stein). Ordlista.

Poäng: Totalt kan 40 poäng erhållas. För godkänt krävs ca 16 poäng.

Jourhavande lärare: Peter Jonsson, tel 28 24 15 eller 070 773 43 89.

Allmänt: Skriv läsligt. Onödigt komplicerade lösningar kan leda till poängavdrag. Bristfälligt motiverade lösningar leder ofelbart till poängavdrag. Om inte annat anges skall presenterade algoritmer vara körbara på en processor av standardtyp (vilket utesluter exempelvis kvantdatorer och massiv parallellism). Slumpbitar får användas av algoritmer vid behov och de förutsätts kunna genereras i konstant tid.

Uppgifterna i tentamen är inte ordnade efter svårighetsgrad.

Lycka till!

Peter

Uppgift 1. (8p)
Betrakta ekvationssystem sådana att varje ekvation är av typen $x_i + x_j = x_k$ där x_i, x_j, x_k är distinkta variabler. Konstruera en algoritm som tilldelar varje variabel antingen värdet 0 eller 1 och som gör att minst 1/3 av ekvationerna är satisfierade. Algoritmen får vara randomiserad och då är kravet att det förväntade antalet satisfierade ekvationer är minst 1/3. I båda fallen ska algoritmen gå i polynomisk tid.

Uppgift 2. (8p)
Vi inleder med ett par definitioner:

(1) En *k-färgning* av en oriktad graf $G = (V, E)$ är en total funktion $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ med följande egenskap: om $(v, w) \in E$ så är $f(v) \neq f(w)$.

(2) En oriktad graf $G = (V, E)$ har *grad* k om och endast om det maximala antalet noder någon nod är ansluten till är k.

Konstruera en polynomisk algoritm som givet en oriktad, sammanhängande graf $G = (V, E)$ av grad k färgar denna med högst $k + 1$ färger.

Uppgift 3. (8p)
En *Horn-klausul* är en klausul som innehåller maximalt en icke-negerad variabel; exempel är (x), $(\neg x)$, $(\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$ och $(\neg x \vee \neg y \vee \neg z \vee w)$. En *Horn*$^+$*-formel* är en propositionslogisk formel $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_k$ där varje C_i, $1 \leq i \leq k$, antingen är en Horn-klausul eller av typen $(x \vee y)$ (d.v.s. innehåller exakt två icke-negerade literaler och ingenting annat). Visa att satisfierbarhetsproblemet för Horn$^+$-formler är NP-fullständigt.

Uppgift 4. (8p)
Konstruera en polynomisk algoritm som hittar maximalt stora oberoende mängder i oriktade träd. Med andra ord, givet ett träd $T = (V, E)$, hitta en delmängd $V' \subseteq V$ med maximal storlek och med egenskapen att om $x, y \in V'$ så gäller $\{x, y\} \notin E$. Som vanligt förekommer inga självloopar (det vill säga bågar från x till x) i T.

Uppgift 5. (8p)
Låt $L = (L_1, \ldots, L_n)$ vara en lista innehållande n heltal (som kan vara både positiva och negativa). Utveckla en algoritm som hittar de två index $1 \leq i \leq j \leq n$ som maximerar summan $S_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} L_k$. Exempel: Om $L = (10, -12, 5, 7, -2, 4, -11)$ så ger indexen 3 och 6 summan $S_{3,6} = 5 + 7 - 2 + 4 = 14$ och den är maximal i detta fall. Algoritmen ska gå i $O(n \log n)$ tid eller bättre. Notera att det finns en trivial algoritm som går i $O(n^2)$ tid.