Linköpings Universitet
Institutionen för datavetenskap
Peter Jonsson

TDDD20 Konstruktion och analys av algoritmer

Tentamen lördagen den 22:e oktober 2011, kl 08.00–13.00.

Hjälpmedel: Kursboken "Introduction to Algorithms" (Cormen, Leiserson, Rivest & Stein). Ordlista.

Poäng: Totalt kan 40 poäng erhållas. För godkänt krävs ca 16 poäng.

Jourhavande lärare: Peter Jonsson, tel 28 24 15 eller 070 773 43 89.

Allmänt: Skriv läsligt. Onödigt komplicerade lösningar kan leda till poängavdrag. Bristfälligt motiverade lösningar leder ofelbart till poängavdrag.

Uppgifterna i tentamen är inte ordnade efter svårighetsgrad.

Lycka till!

Peter

Uppgift 1. (8p)
Konstruera en polynomisk algoritm som hittar största oberoende mängder i oriktade träd. Med andra ord, givet ett träd $T = (V, E)$, hitta en delmängd $V' \subseteq V$ med maximal storlek sådan att för alla $x, y \in V'$ så gäller att $\{x, y\} \notin E$.

Uppgift 2. (8p)
Betrakta följande problem:

INDATA: En uppsättning ekivalenser mellan par av literaler (där varje literal antingen är en negerad eller icke-negerad boolesk variabel) samt ett positivt heltal K.
FRÅGA: Går det att ge alla variabler booleska sanningsvärden så att minst K ekvivalenser är satisfierade?

Ett exempel på indata är

$$(x \equiv y, \neg y \equiv \neg z, z \equiv \neg w, w \equiv x, w \equiv x), \ K = 3$$

Man ser att ekvivalensen $w \equiv x$ förekommer två gånger i instansen; sådana flerdubblingar är tillåtna. Visa att problemet är NP-fullständigt.

Tips: Reducera från det NP-fullständiga problemet MAX-2-CNF (d.v.s. MAX-CNF där varje klausul innehåller högst två literaler). Notera att vi i kursen har kallat problemet MAX-2-CNF för MAX 2SAT.

Uppgift 3. (8p)
Betrakta följande grafproblem:

Indata: Sammanhängande graf G med n noder och m bågar.
Utdata: Alla par av noder x, y sådana att om man tar bort x och y ur G så blir den resulterande grafen ej sammanhängande.

Konstruera en algoritm som löser detta problem i $O(n \cdot m)$ tid. Observera att man kan kontrollera om en graf är sammanhängande i $O(m)$ tid. Alltså kan problemet trivialt lösas i $O(n^2 \cdot m)$ tid.

Uppgift 4. (8p)
Ett linjärt ekvationssystem är *homogent* om varje ekvation har en nolla i högerledet. Ett exempel är

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & - & 3z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 4y & - & z & = & 0 \end{array}$$

Man kan notera att varje sådant system är lösbart; noll-lösningen (där varje variabel sätts till 0) är en giltig lösning. Konstruera en polynomisk algoritm som testar om ett linjärt homogent ekvationssystem har en heltalslösning skild från noll-lösningen. Antag för enkelhets skull att alla koeffecienter är heltal.

Uppgift 5. (8p)
Låt V vara en mängd variabler och C en mängd villkor av typen $(x < y)$ där x, y är distinkta variabler i V. Vi säger att (V, C) har en lösning om och endast om det existerar en funktion $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ sådan att för alla $(x < y) \in C$ gäller $f(x) < f(y)$. Konstruera en polynomisk algoritm som beräknar en mängd $C' \subseteq C$ med följande egenskaper:

1. (V, C') har en lösning; och
2. $|C'| \geq |C|/2$.

Algoritmen får gärna vara randomiserad och då ändras krav 2 till följande:

2' den *förväntade* storleken på C' skall vara $\geq |C|/2$.

Uppgiften ger poäng även om man inte uppnår gränsen $|C|/2$; algoritmer som klarar $|C'| \geq |C|/4$ kommer också att tilldelas en icke oansenlig poängsumma (och detta gäller både i det deterministiska och randomiserade fallet).