Linköpings Universitet
Institutionen för datavetenskap
Peter Jonsson

TDDD20 Konstruktion och analys av algoritmer

Tentamen måndagen den 22:e augusti 2011, kl 14.00–19.00.

Hjälpmedel: Kursboken "Introduction to Algorithms" (Cormen, Leiserson, Rivest & Stein). Ordlista.

Poäng: Totalt kan 40 poäng erhållas. För godkänt krävs ca 16 poäng.

Jourhavande lärare: Peter Jonsson, tel 28 24 15 eller 070 773 43 89.

Allmänt: Skriv läsligt. Onödigt komplicerade lösningar kan leda till poängavdrag. Bristfälligt motiverade lösningar leder ofelbart till poängavdrag.

Uppgifterna i tentamen är inte ordnade efter svårighetsgrad.

Lycka till!

Peter

Uppgift 1. (8p)
Konstruera en polynomisk algoritm som hittar största oberoende mängder i oriktade träd. Med andra ord, givet ett träd $T = (V, E)$, hitta en delmängd $V' \subseteq V$ med maximal storlek sådan att för alla $x, y \in V'$ så gäller att $\{x, y\} \notin E$.

Uppgift 2. (8p)
Betrakta följande problem:

Indata: En mängd variabler V och en mängd uttryck U av typen $R(x, y, a, b)$ där $x, y \in V$ och $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$.

Fråga: Finns det en total funktion $f : V \to \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ sådan att för varje $R(x, y, a, b)$ i U så uppfylls minst ett av villkoren $f(x) \neq a$ och $f(y) \neq b$?

Visa att problemet ovan är NP-fullständigt.

Uppgift 3. (8p)
Låt $G = (V, E)$ vara en oriktad och sammanhängande graf där varje båge $e \in E$ har en positiv vikt $w(e)$. Vi vet att G innehåller minst ett minsta uppspännande träd och ett sådant kan hittas i polynomisk tid (t.ex. med Kruskals eller Prims algoritm). Konstruera en polynomisk algoritm som kontrollerar om en given graf med positiva bågvikter innehåller minst två olika minsta uppspännande träd.

Uppgift 4. (8p)
Ett linjärt ekvationssystem är *homogent* om varje ekvation har en nolla i högerledet. Ett exempel är

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & - & 3z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 4y & - & z & = & 0 \end{array}$$

Man kan notera att varje sådant system har den triviala noll-lösningen där varje variabel sätts till 0. Konstruera en polynomisk algoritm som testar om ett linjärt homogent ekvationssystem har en heltalslösning skild från noll-lösningen. Antag för enkelhets skull att alla koeffecienter är heltal.

Uppgift 5. (8p)
Låt $G = (V, E)$ vara en godtycklig riktad graf. Konstruera en polynomisk algoritm som beräknar en mängd $E' \subseteq E$ med följande egenskaper:

1. (V, E') är acyklisk; och
2. $|E'| \geq |E|/2.$

Algoritmen får gärna vara randomiserad och då ändras krav 2 till följande:

2' den *förväntade* storleken på E' skall vara $\geq |E|/2$.

Uppgiften ger poäng även om man inte uppnår gränsen $|E|/2$; algoritmer som klarar $|E'| \geq |E|/4$ kommer också att tilldelas en icke oansenlig poängsumma (och detta gäller både i det deterministiska och randomiserade fallet).