Linköpings Universitet
Institutionen för datavetenskap
Peter Jonsson

TDDD20 Konstruktion och analys av algoritmer

Tentamen fredagen den 27:e augusti 2010, kl 14.00–19.00.

Hjälpmedel: Kursboken "Introduction to Algorithms" (Cormen, Leiserson & Rivest). Ordlista.

Poäng: Totalt kan 40 poäng erhållas. För godkänt krävs ca 16 poäng.

Jourhavande lärare: Peter Jonsson, tel 28 24 15 eller 070 773 43 89.

Allmänt: Skriv läsligt. Onödigt komplicerade lösningar kan leda till poängavdrag. Bristfälligt motiverade lösningar leder ofelbart till poängavdrag.

Uppgifterna i tentamen är inte ordnade efter svårighetsgrad.

Lycka till!

Peter

Uppgift 1. (8p)
Betrakta följande problem:

INDATA: En uppsättning ekivalenser mellan par av literaler (där varje literal antingen är en negerad eller icke-negerad boolesk variabel) samt ett positivt heltal K.
FRÅGA: Går det att ge alla variabler booleska sanningsvärden så att minst K ekvivalenser är satisfierade?

Ett exempel på indata är

$$(x \equiv y, \neg y \equiv \neg z, z \equiv \neg w, w \equiv x, w \equiv x),\ K = 3$$

Notera att ekvivalensen $w \equiv x$ förekommer två gånger i instansen; sådana flerdubblingar är tillåtna. Visa att problemet är NP-fullständigt.

Tips: Reducera från det NP-fullständiga problemet MAX-2-CNF (d.v.s. MAX-CNF där varje klausul innehåller högst två literaler).

Uppgift 2. (8p)
En instans av *mängdproblemet* består av en ändlig mängd trippler (V_1, C, V_2) där V_1, V_2 är variabler och $C \in \{\subseteq, \mathsf{disj}\}$. Låt $I = \{T_1, \ldots, T_k\}$ vara en godtycklig instans av detta problem över variablerna $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ och låt E vara mängden av alla icke-tomma, ändliga delmängder av de naturliga talen. Vi säger att I har en lösning om och endast om det finns en total funktion f från X till E sådan att

- $f(x_i) \subseteq f(x_j)$ för varje $(x_i, \subseteq, x_j)$ i I; och
- $f(x_i) \cap f(x_j) = \emptyset$ för varje $(x_i, \mathsf{disj}, x_j)$ i I.

Konstruera en polynomisk algoritm som undersöker om en godtycklig instans av mängdproblemet har en lösning.

Uppgift 3. (8p)
Vi säger att en sträng $s = s_1 s_2 \ldots s_m$ är *dold* i en sträng $t = t_1 t_2 \ldots t_n$ om det finns tal $1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n$ sådana att $s = t_{j_1} t_{j_2} \ldots t_{j_m}$. Konstruera en algoritm som i $O(m \cdot n)$ tid räknar ut hur många olika sätt strängen s finns dold i strängen t. Exempelvis finns strängen `kost` dold på två sätt i strängen `konstruktion` medan `rim` endast finns dold på ett sätt i `algoritm`.

Uppgift 4. (8p)
Låt $G = (V, E)$ vara en oriktad och sammanhängande graf där varje båge $e \in E$ har en positiv vikt $w(e)$. Vi vet att G innehåller minst ett minsta uppspännande träd och ett sådant kan hittas i polynomisk tid (t.ex. med Kruskals eller Prims algoritm). Konstruera en polynomisk algoritm som kontrollerar om en given graf med positiva bågvikter innehåller minst två olika minsta uppspännande träd.

Uppgift 5. (8p)
Det NP-fullständiga problemet NAE3SAT definieras enligt följande:

INDATA: En CNF-formel där varje klausul innehåller exakt tre stycken literaler.
FRÅGA: Finns det en tilldelning av sanningsvärden till propositionerna sådan att minst en men högst två literaler i varje klausul blir sann?

Eftersom detta problem är beräkningsmässigt svårt så behövs en approximationsalgoritm för problemet—denna algoritm skall i polynomisk tid konstruera en tilldelning som gör att så många klausuler som möjligt får en korrekt tilldelning (d.v.s. att minst en men högst två literaler i klausulen blir sann). Konstruera en randomiserad algoritm som förväntas ge *minst* 70% av klausulerna en korrekt tilldelning.