Linköpings Universitet
Institutionen för datavetenskap
Peter Jonsson

TDDD20 Konstruktion och analys av algoritmer

Tentamen fredagen den 15:e januari 2010, kl 08.00–13.00.

Hjälpmedel: Kursboken "Introduction to Algorithms" (Cormen, Leiserson & Rivest). Ordlista.

Poäng: Totalt kan 40 poäng erhållas. För godkänt krävs ca 16 poäng.

Jourhavande lärare: Peter Jonsson, tel 28 24 15 eller 070 773 43 89.

Allmänt: Skriv läsligt. Onödigt komplicerade lösningar kan leda till poängavdrag. Bristfälligt motiverade lösningar leder ofelbart till poängavdrag.

Uppgifterna i tentamen är inte ordnade efter svårighetsgrad.

Lycka till!

Peter

Uppgift 1. (8p)
Låt f vara en strängt växande funktion på de naturliga talen (d.v.s. om $x < y$ så är $f(x) < f(y)$) och antag att f kan beräknas i $O(1)$ tid. Givet två mängder A och B innehållande naturliga tal vill vi kontrollera om $A = \{f(b) \mid b \in B\}$. En trivial algoritm klarar detta i $O(n^2)$ tid där n är summan av antalet element i mängderna. Konstruera en *väsentligen* snabbare algoritm för detta problem (som exempelvis går i $O(n^{\log_2 3})$ eller $O(n/\log_2 n)$ tid).

Uppgift 2. (8p)
Betrakta följande problem:

INDATA: En uppsättning ekivalenser mellan par av literaler (där varje literal antingen är en negerad eller icke-negerad boolesk variabel) samt ett positivt heltal K.
FRÅGA: Går det att ge alla variabler booleska sanningsvärden så att minst K ekvivalenser är satisfierade?

Ett exempel på indata är

$$(x \equiv y, \neg y \equiv \neg z, z \equiv \neg w, w \equiv x, w \equiv x),\ K = 3$$

Notera att ekvivalensen $w \equiv x$ förekommer två gånger i instansen; sådana flerdubblingar är tillåtna. Visa att problemet är NP-fullständigt.

Tips: Reducera från det NP-fullständiga problemet MAX-2-CNF (d.v.s. MAX-CNF där varje klausul innehåller högst två literaler).

Uppgift 3. (8p)
En instans av *mängdproblemet* består av en ändlig mängd trippler (V_1, C, V_2) där V_1, V_2 är variabler och $C \in \{\subseteq, \mathsf{disj}\}$. Låt $I = \{T_1, \ldots, T_k\}$ vara en godtycklig instans av detta problem över variablerna $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ och låt E vara mängden av alla icke-tomma, ändliga delmängder av de naturliga talen. Vi säger att I har en lösning om och endast om det finns en total funktion f från X till E sådan att

- $f(x_i) \subseteq f(x_j)$ för varje $(x_i, \subseteq, x_j)$ i I; och
- $f(x_i) \cap f(x_j) = \emptyset$ för varje $(x_i, \mathsf{disj}, x_j)$ i I.

Konstruera en polynomisk algoritm som undersöker om en godtycklig instans av mängdproblemet har en lösning.

Uppgift 4. (8p)
Vi inleder med ett par definitioner:

(1) En *k-färgning* av en oriktad graf $G = (V, E)$ är en total funktion $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ med följande egenskap: om $(v, w) \in E$ så är $f(v) \neq f(w)$.

(2) En oriktad graf $G = (V, E)$ har *grad* k om och endast om det maximala antalet noder någon nod är ansluten till är k.

Konstruera en polynomisk algoritm som givet en oriktad, sammanhängande graf $G = (V, E)$ av grad k färgar denna med högst $k + 1$ färger.

Uppgift 5. (8p)
Det NP-fullständiga problemet NAE3SAT definieras enligt följande:

INDATA: En CNF-formel där varje klausul innehåller exakt tre stycken literaler.
FRÅGA: Finns det en tilldelning av sanningsvärden till propositionerna sådan att minst en men högst två literaler i varje klausul blir sann?

Eftersom detta problem är beräkningsmässigt svårt så behövs en approximationsalgoritm för problemet—denna algoritm skall i polynomisk tid konstruera en tilldelning som gör att så många klausuler som möjligt får en korrekt tilldelning (d.v.s. att minst en men högst två literaler i klausulen blir sann). Konstruera en randomiserad algoritm som förväntas ge *minst* 70% av klausulerna en korrekt tilldelning.