Tentamen i TDDC75 Diskreta strukturer

2019-01-07

- Ta det lugnt, arbeta metodiskt, kolla dina svar.
- Om du misstänker fel i någon uppgift kontakta jourlärare, Mikael Asplund, 0700 895 827.
- Kom ihåg att svaren på samtliga uppgifter måste **motiveras**, och att motiveringarna skall vara uppställda på ett sådant sätt att det går att följa hur du har tänkt. *Omotiverade svar ger 0 poäng om inget annat sägs.*
- Maxpoäng är 30 poäng. För betyg 3 krävs minst 15 poäng, för betyg 4 krävs 20 poäng och för betyg 5 krävs 25 poäng.

Lycka till!!!

1. Betrakta följande satslogiska uttryck: $(p \land \neg q) \lor \neg(q \to p)$

   (a) Skapa en sanningstabell för uttrycket.

   (b) Motivera med hjälp av sanningstabellen att $(p \land \neg q) \lor \neg(q \to p) \Rightarrow (p \lor q)$.

   (c) Visa genom deduktion att $(p \land \neg q) \lor \neg(q \to p) \Rightarrow (p \lor q)$. Använd reglerna från formelbladet.

(5 poäng)

2. Sökmotorer på webben fungerar i princip genom att hämta ett stort antal sidor (dokument) och indexera dessa med avseende på vilka ord de innehåller. Vi skapar en enkel matematisk modell för detta. Låt O beteckna mängden av möjliga ord och för varje element $i \in O$ låt D_i beteckna mängden av dokument som innehåller ordet i.

   Tolka nedanstående matematiska utsagor med naturligt språk. Observera att för full poäng krävs att tolkningarna inte bara är en direkt beskrivning av det matematiska uttrycket, dvs undvik ord som "mängd", "kardinalitet", "union", osv.

   (a) $|D_{\text{katt}}| < |D_{\text{hund}}|$

   (b) $D_{\text{klarinettkonsert}} \cap D_{\text{gangsta}} = \varnothing$

   (c) $|D_{\text{björn}} \cup D_{\text{varg}} \cup D_{\text{järv}}| = 100000$

   (d) $\forall i \in O : |D_i| > 0$

   (e) $\exists i, j \in O : D_i = D_j$

(5 poäng)

3. Låt A vara en mängd, $A = \{0, 1, 2, 3\}$ och $R \subseteq A \times A$ en relation definierad som $R = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$. Är R en partialordning? Är R en ekvivalensrelation? Kom ihåg att motivera ordentligt!

(5 poäng)

4. När meddelanden som skickas över ett nätverk ska krypteras brukar man skilja på det som är innehållet i meddelandet (payload) och det som anger metadata för meddelandet (header). Låt A vara mängden av möjliga meddelandeinnehåll och B mängden av krypterade meddelandeinnehåll. Låt vidare C vara mängden av möjliga headers, och D mängden av krypterade headers.

   Låt $f : A \to B$ och $g : C \to D$ vara två krypteringsfunktioner. Definiera den kombinerade krypteringsfunktionen $h : A \times C \to B \times D$ genom $h(x, y) = (f(x), g(y))$, där $(x, y) \in A \times C$. Visa att h är bijektiv om och endast om f och g båda är bijektiva.

   (5 poäng)

5. Givet ett positivt heltal n så betecknar som bekant $n!$ fakulteten för n och definieras som $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Visa med induktion att $(n!)^2 \leq (n^2)!$ gäller för alla positiva heltal n.

   (5 poäng)

6. Låt A och B vara mängder. Antag att R är en partialordning på A och att Q är en partialordning på B. Definiera relationen $T = R \cup Q$.

   (a) Visa att T alltid är en partialordning på $A \cup B$ om A och B är disjunkta (dvs. $A \cap B = \varnothing$).

   (b) Visa att T inte måste vara en partialordning på $A \cup B$ om A och B överlappar (dvs. $A \cap B \neq \varnothing$).

   (5 poäng)

A Formelblad

Regel	Benämning
$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Lagen om dubbel negation
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	De Morgans lagar
$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	Associativa lagarna
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributiva lagarna
$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$	Idempotens
$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ $p \vee 0 \Leftrightarrow p$	Identitetslagarna
$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$	Dominans
$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$ $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$	Inversa lagarna
$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	Absorption
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	Implikationslagen
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	Kontrapositiva lagen
$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	Ekvivalenslagen
$(p \rightarrow q), p \Rightarrow q$	Modus ponens
$(p \rightarrow q), \neg q \Rightarrow \neg p$	Modus tollens
$(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$	Syllogism
$p \wedge q \Rightarrow p$	Konjunktiv förenkling
$p \Rightarrow p \vee q$	Disjunktiv förstärkning
$(p \vee q), \neg q \Rightarrow p$	Disjunktiv syllogism
$p, q \Rightarrow p \wedge q$	Konjunktionsregeln

Tabell 1: Logiska ekvivalenser och konsekvenser