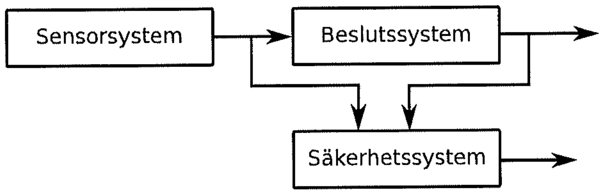
Tentamen i TDDC75 Diskreta strukturer

2018-09-01

- Ta det lugnt, arbeta metodiskt, kolla dina svar.
- Kom ihåg att svaren på samtliga uppgifter måste **motiveras**, och att motiveringarna skall vara uppställda på ett sådant sätt att det går att följa hur du har tänkt. *Omotiverade svar ger 0 poäng om inget annat sägs.*
- Maxpoäng är 30 poäng. För betyg 3 krävs minst 15 poäng, för betyg 4 krävs 20 poäng och för betyg 5 krävs 25 poäng.

Lycka till!!!

1. Denna uppgift handlar om kravställning av säkerhetssystemet för en självkörande bil. En mycket förenklad översikt visas i figur 1 nedan. Figuren visar ett system som består av tre delsystem. Sensorsystemet använder ett stort antal sensorer (radar, kamera, GPS, hastighetsmätare, etc) för att bilda en lägesbild av bilen och dess omgivning. Denna information går vidare till bilens beslutssystem som kontrollerar bilens acceleration, inbromsning, och styrning. Informationen matas också, tillsammans med vilket beslut som har fattats, till säkerhetssystemet som har till uppgift att övervaka beslutssystemet och säkerställa att inga farliga beslut fattas.



Figur 1: Översikt av säkerhetsystemets relation till övriga system

I en enkel formalisering av kraven har följande möjliga satslogiska variabler definerats.

- k - sensorsystemet rapporterar risk för kollision
- o - sensorsystemet har identifierat oskyddade trafikanter i fordonets närhet
- h - fordonets hastighet är hög
- r - säkerhetssystemet reagerar

Vidare har två krav definerats på säkerhetssystemet enligt nedan.

$$k \to r \tag{1}$$

$$h \wedge o \to r \tag{2}$$

Det har också framförts önskemål om att följande påstående skulle infogas som ett krav:

$$\neg r \wedge o \to \neg k \wedge \neg h \tag{3}$$

Dock har ingenjörerna som arbetar med systemet menat att detta krav redan följer av krav 1 och 2. Din uppgift nu är att

(a) Tolka kraven (1)-(2) med ord. (1p)

(b) Tolka påståendet (3) med ord. (1p)

(c) Bevisa att (1) och (2) medför (3) med hjälp av deduktion (tips: använd indirekt härledning). Använd logiska implikationer och ekvivalenser från formelbladet. (3p)

(5 poäng)

2. Låt R_1 och R_2 vara följande relationer på $\{1,2,3,4\}$

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1,1),(1,2),(3,4),(4,2)\} \\ R_2 &= \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,4),(2,2)\} \end{aligned}$$

Skriv ut följande relationer (på samma form som relationerna ovan):

(a) Reflexiva höljet av R_1.

(b) Symmetriska höljet av R_1.

(c) Symmetriska höljet av $R_1 \cup R_2$.

(d) Transitiva höljet av R_1.

(e) Transitiva och reflexiva höljet av R_2.

(5 poäng)

3. Ange för var och en av följande relationer (på de hela talen) om den är reflexiv, symmetrisk och/eller transitiv (eller ingendera):

- $R_1 = \{(a,b) \mid a > b\}$
- $R_2 = \{(a,b) \mid a = b \text{ eller } a = -b\}$
- $R_3 = \{(a,b) \mid a = b\}$
- $R_4 = \{(a,b) \mid a = b + 1\}$
- $R_5 = \{(a,b) \mid a + b \leq 3\}$

(5 poäng)

4. Låt A och B vara godtyckliga mängder. Gäller nedanstående likheter aldrig, alltid eller ibland (dvs. beroende på vilka mängderna är)? Bevisa ditt svar.

(a) $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$

(b) $2^{A \times B} = 2^A \times 2^B$

(c) $2^{A \cap B} \subseteq 2^{A \cup B}$

(5 poäng)

5. Låt $f: A \to A$ vara en funktion på $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ definierad som

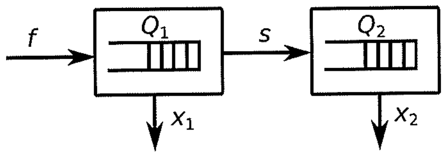
$$f(x) = 4x \bmod 5.$$

Skriv f som en mängd av ordnade par. Är f injektiv? bijektiv? surjektiv? **Anm**: $m \bmod n$ är den rest som uppstår vid heltalsdivision när m delas med n; t.ex. $10 \bmod 3 = 1$.

(5 poäng)

6. Denna uppgift handlar om ett logistiksystem som hanterar inkommande förfrågningar från klienter som vill lägga till eller få information om leveranser. Systemet är uppdelat i två tjänster som kan besvara förfrågningarna. Varje tjänst har en egen kö (Q_1 och Q_2) där förfrågningarna lagras tills de kan besvaras i den ordning de kom. Alla förfrågningar kommer först till kö Q_1 och kan sedan slussas vidare till kö Q_2 om behov finns. Hanteringen av förfrågningar kan ske i varierande takt, men det finns garantier på att om kön blir tillräkligt lång så kommer minst en förfrågan att besvaras under en viss tidsperiod.

Figur 1 nedan visar en någon förenklad principskiss över systemet med de två köerna. De inkommande förfrågningarna kommer med f enheter per tidsenhet till kö Q_1. Från denna kö kan x_1 föfrågningar besvaras av den första tjänsten, och s av dem slussas vidare till kö Q_2. På motsvarande sätt kan x_2 förfrågningar från kö Q_2 besvaras av den andra tjänsten.



Figur 2: Principskiss för de två köerna

För att fånga tidsaspekten kan vi uttrycka kölängden som en tidsberoende variabel $Q_i^n \in \mathbb{N}$ där $i = 1, 2$ och $n = 0, 1, 2, \ldots$ står för tidspunkten (obs, detta har inget att göra med "upphöjt-till"). För att bestämma längden på kön vid nästa tid använder vi då följande uttryck:

$$xQ_1^{n+1} = Q_1^n + f - s^n - x_1^n \tag{4}$$

där vi för enkelhets skull låter inkommande föfrågningar alltid vara $f = 1$, de vidareslussade förfrågningarna vid tiden n vara $s^n \in \mathbb{N}$, och x_1^n representera hur många förfrågningar som besvaras av tjänst 1 vid tiden n, enligt uttrycket nedan.

$$x_1^n = \begin{cases} 1 \text{ om } Q_1^n \geq 5 \\ 0 \text{ annars} \end{cases} \tag{5}$$

På motsvarande sätt kan vi uttrycka kölängden för Q_2 vid nästa tid $n+1$ som

$$Q_2^{n+1} = Q_2^n + s^n - x_2^n \tag{6}$$

och antalet förfrågningar som besvaras av den andra tjänsten vid tiden n som

$$x_2^n = \begin{cases} 1 \text{ om } Q_2^n \geq 2 \\ 0 \text{ annars} \end{cases} \tag{7}$$

Vid systemets uppstart är köerna tomma ($Q_i^0 = 0,\ i = 1, 2$). Visa med hjälp av induktion att den sammanlagda kölängden aldrig överstiger 6.

(5 poäng)

A Formelblad

Regel	**Benämning**
$\neg\neg p \equiv p$	Lagen om dubbel negation
$\neg(p \land q) \equiv (\neg p \lor \neg q)$ $\neg(p \lor q) \equiv (\neg p \land \neg q)$	De Morgans lagar
$(p \land (q \land r)) \equiv ((p \land q) \land r)$ $(p \lor (q \lor r)) \equiv ((p \lor q) \lor r)$	Associativa lagarna
$(p \land (q \lor r)) \equiv ((p \land q) \lor (p \land r))$ $(p \lor (q \land r)) \equiv ((p \lor q) \land (p \lor r))$	Distributiva lagarna
$(p \land p) \equiv p$ $(p \lor p) \equiv p$	Idempotens
$(p \land 1) \equiv p$ $(p \lor 0) \equiv p$	Identitetslagarna
$(p \land 0) \equiv 0$ $(p \lor 1) \equiv 1$	Dominans
$(p \land \neg p) \equiv 0$ $(p \lor \neg p) \equiv 1$	Inversa lagarna
$(p \land (p \lor q)) \equiv p$ $(p \lor (p \land q)) \equiv p$	Absorption
$(p \to q) \equiv (\neg p \lor q)$	Implikationslagen
$(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$	Kontrapositiva lagen
$(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \to q) \land (q \to p))$	Ekvivalenslagen
$(p \to q), p \Rightarrow q$	Modus ponens
$(p \to q), \neg q \Rightarrow \neg p$	Modus tollens
$(p \to q), (q \to r) \Rightarrow p \to r$	Syllogism
$p \land q \Rightarrow p$	Konjunktiv förenkling
$p \Rightarrow p \lor q$	Disjunktiv förstärkning
$(p \lor q), \neg q \Rightarrow p$	Disjunktiv syllogism
$p, q \Rightarrow p \land q$	Konjunktionsregeln

Tabell 1: Logiska ekvivalenser och konsekvenser