Tentamen i TDDC75 Diskreta strukturer

2018-01-02, kl. 14–18

- Ta det lugnt, arbeta metodiskt, kolla dina svar.
- Kom ihåg att svaren på samtliga uppgifter måste **motiveras**, och att motiveringarna skall vara uppställda på ett sådant sätt att det går att följa hur du har tänkt. *Omotiverade svar ger 0 poäng om inget annat sägs.*
- Maxpoäng är 30 poäng. För betyg 3 krävs minst 15 poäng, för betyg 4 krävs 20 poäng och för betyg 5 krävs 25 poäng.

Lycka till!!!

1. Betrakta påståendet $(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$.

   (a) Bevisa att påståendet stämmer med hjälp av sanningstabeller och resonemang kring logisk konsekvens. (2p)

   (b) Bevisa att påståendet stämmer med hjälp av naturlig deduktion (ta hjälp av formelbladet). (2p)

   (c) Låt p betyda att solen skiner och q betyda att det regnar. Vad blir då påståendet uttryckt som naturligt språk och hur kan det vara möjligt att du just har bevisat påståendet? (1p)

(5 poäng)

2. Datorer idag är idag ofta utrustade med processorer som har flera så kallade *kärnor* (eng. cores). Varje kärna kan utföra instruktioner relativt oberoende av de andra vilket leder till en form av parallellexekvering. Samtidigt kan ett program i ett modernt operativsystem bestå av flera parallella trådar vilka således kan köras på olika kärnor. Som exempel så kan en webbläsare ha en tråd för varje öppen flik.

   Låt A, B vara två mängder med program som just nu körs på kärnorna a respektive b. Totala mängden program är $\mathcal{U} = \{p_1, \ldots, p_8\}$. Anta att följande påståenden gäller:

   - $A \cup B = \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_6, p_7\}$
   - $A \cap B = \{p_2, p_7\}$
   - $\overline{B} \setminus \overline{A} = \{p_1, p_5\}$

   Vilka program använder kärna a och vilka program använder kärna b? Eller annorlunda uttryckt, bestäm mängderna A och B. Obs svaret måste motiveras genom matematiskt resonemenang (exvis omskrivningar av mängduttryck). Det räcker inte att rita upp ett Venn-diagram för full poäng (men det är absolut bra för att få en förståelse för problemet).

   (5 poäng)

3. Ange för var och en av följande relationer (på de hela talen) om den är reflexiv, symmetrisk och/eller transitiv (eller ingendera):

   - $R_1 = \{(a, b) \mid a > b\}$
   - $R_2 = \{(a, b) \mid a = b \text{ eller } a = -b\}$
   - $R_3 = \{(a, b) \mid a = b\}$
   - $R_4 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$
   - $R_5 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$

   (5 poäng)

4. Låt A och B vara mängder. Antag att R är en partialordning på A och att Q är en partialordning på B. Definiera relationen $T = R \cup Q$.

   (a) Visa att T alltid är en partialordning på $A \cup B$ om A och B är disjunkta (dvs. $A \cap B = \emptyset$).

   (b) Visa att T inte måste vara en partialordning på $A \cup B$ om A och B överlappar (dvs. $A \cap B \neq \emptyset$).

   (5 poäng)

5. Visa med hjälp av induktion att

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

för varje positivt heltal n.

(5 poäng)

6. Låt L vara mängden av alla länder och S mängden av alla städer. Definiera relationen $R \subseteq L \times L$ så att $(x, y) \in R$ uttrycker att land x gränsar till land y. Definiera relationen $Q \subseteq S \times S$ så att $(x, y) \in Q$ uttrycker att städerna x och y ligger i samma land. Definiera funktionen $f : S \to L$ så att $f(x)$ är det land som staden x ligger i. Definiera funktionen $g : L \to S$ så att $g(x)$ anger huvudstaden i landet x.

   (a) Låt x och y vara två städer. Vad säger uttrycket $(f(x), f(y)) \in R$ om dessa?

   (b) Vad vet vi om länderna x och y om vi vet att $(g(x), g(y)) \in Q$ gäller?

   (c) Betrakta den sammansatta funtionen $h = f \circ g$, dvs. $h(x) = f(g(x))$. Ge den enklast möjliga definitionen av funktionen h.

(5 poäng)

A Formelblad

Regel	**Benämning**
$\neg\neg p \equiv p$	Lagen om dubbel negation
$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$ $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$	De Morgans lagar
$(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$ $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$	Associativa lagarna
$(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	Distributiva lagarna
$(p \wedge p) \equiv p$ $(p \vee p) \equiv p$	Idempotens
$(p \wedge 1) \equiv p$ $(p \vee 0) \equiv p$	Identitetslagarna
$(p \wedge 0) \equiv 0$ $(p \vee 1) \equiv 1$	Dominans
$(p \wedge \neg p) \equiv 0$ $(p \vee \neg p) \equiv 1$	Inversa lagarna
$(p \wedge (p \vee q)) \equiv p$ $(p \vee (p \wedge q)) \equiv p$	Absorption
$(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$	Implikationslagen
$(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$	Kontrapositiva lagen
$(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \to q) \wedge (q \to p))$	Ekvivalenslagen
$(p \to q), p \Rightarrow q$	Modus ponens
$(p \to q), \neg q \Rightarrow \neg p$	Modus tollens
$(p \to q), (q \to r) \Rightarrow p \to r$	Syllogism
$p \wedge q \Rightarrow p$	Konjunktiv förenkling
$p \Rightarrow p \vee q$	Disjunktiv förstärkning
$(p \vee q), \neg q \Rightarrow p$	Disjunktiv syllogism
$p, q \Rightarrow p \wedge q$	Konjunktionsregeln

Tabell 1: Logiska ekvivalenser och konsekvenser