Tentamen i TDDC75 Diskreta strukturer

2017-10-18, kl. 8–12

- Ta det lugnt, arbeta metodiskt, kolla dina svar.
- Kom ihåg att svaren på samtliga uppgifter måste **motiveras**, och att motiveringarna skall vara uppställda på ett sådant sätt att det går att följa hur du har tänkt. *Omotiverade svar ger 0 poäng om inget annat sägs.*
- Maxpoäng är 30 poäng. För betyg 3 krävs minst 15 poäng, för betyg 4 krävs 20 poäng och för betyg 5 krävs 25 poäng.

Lycka till!!!

1. Låt $T = \{\ldots, \text{c}, \text{d}, \text{e}, \text{f}, \text{g}, \text{a}, \text{b}, \text{c}^1, \text{d}^1, \ldots\}$ vara en mängd med toner från den kromatiska tolvtonsskalan, och låt I vara en mängd av instrumenttyper. Relationen $S \subseteq T \times I$ beskriver vilka toner som kan spelas av vilken instrumenttyp, dvs $(t, i) \in S$ betyder att tonen t kan spelas av instrumentet i.

   Tolka nedanstående formella påståenden och uttryck med naturligt språk. Till exempel översätts påståendet $\exists t \forall i : (t, i) \in S$ till "Det finns en ton som kan spelas av alla instrument".

   - $\exists t \forall i : (t, i) \notin S$
   - $(\text{c}, \text{Fagott}) \in S$
   - $(\{t \mid (t, \text{Trumpet}) \in S\} \cap \{t \mid (t, \text{Tuba}) \in S\}) \neq \emptyset$
   - $|\{i \mid (\text{c}, i) \in S\}| > |\{i \mid (\text{d}^4, i) \in S\}|$
   - $|\{t \mid (t, \text{Piano}) \in S\}| > |\{t \mid (t, \text{Trumpet}) \in S\}|$

   (5 poäng)

2. Antag att $|A| = 3$ och $|B| = 4$. Vad blir följande?

   (a) $|A \times B|$?

   (b) $|2^A|$?

   (c) $|2^A \times 2^B|$?

   (d) Största möjliga värde på $|A \cap B|$?

   (e) Minsta möjliga värde på $|B \setminus A|$?

   Motivera samtliga svar!!!

(5 poäng)

3. Låt A vara en mängd, $A = \{0, 1, 2, 3\}$ och $R \subseteq A \times A$ en relation definierad som $R = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$. Är R en partialordning? Är R en ekvivalensrelation? Kom ihåg att motivera ordentligt!

(5 poäng)

4. Låt F vara mängden av satslogiska formler (exempelvis gäller att $(p \wedge q) \in F$). Låt funktionen $f : F \times F \to \{0, 1\}$, vara definerad så att $f(F_1, F_2) = 1$ om $F_1 \Rightarrow F_2$ och $f(F_1, F_2) = 0$ annars.

   (a) Avgör värdet av $f((p \vee q), (p \vee q \vee r))$.

   (b) Är f surjektiv?

   (c) Är f injektiv?

   (d) Beskriv vilka element som finns i mängden $\{F_i \in F \mid f(1, F_i) = 1\}$ (de har en speciell benämning).

(5 poäng)

5. Visa med hjälp av induktion att $7^n - 1$ är jämnt delbart med 6 för alla heltal $n \geq 1$.

(5 poäng)

6. Betrakta pythonfunktionen f nedan som tar en ändlig mängd A och en relation $R \subseteq A \times A$ som indata.

```
def f(A,R):
  B = set();          #Initialiserar B som en tom mängd
  for (x,y) in R:
    if (x != y):
      B.add(y);       #Lägger till y i B
  return A - B;       #Returnerar mängddifferensen A \ B
```

   (a) Vad gör funktionen f, dvs vilka element innehåller den returnerade mängden $A \setminus B$? (Tips: börja med att beskriva mängden B.)

   (b) Kan funktionen returnera tomma mängden om $A \neq \emptyset$? I så fall, under vilka förutsättningar?

(5 poäng)

A Formelblad

Regel	Benämning
$\neg\neg p \equiv p$	Lagen om dubbel negation
$\neg(p \land q) \equiv (\neg p \lor \neg q)$ $\neg(p \lor q) \equiv (\neg p \land \neg q)$	De Morgans lagar
$(p \land (q \land r)) \equiv ((p \land q) \land r)$ $(p \lor (q \lor r)) \equiv ((p \lor q) \lor r)$	Associativa lagarna
$(p \land (q \lor r)) \equiv ((p \land q) \lor (p \land r))$ $(p \lor (q \land r)) \equiv ((p \lor q) \land (p \lor r))$	Distributiva lagarna
$(p \land p) \equiv p$ $(p \lor p) \equiv p$	Idempotens
$(p \land 1) \equiv p$ $(p \lor 0) \equiv p$	Identitetslagarna
$(p \land 0) \equiv 0$ $(p \lor 1) \equiv 1$	Dominans
$(p \land \neg p) \equiv 0$ $(p \lor \neg p) \equiv 1$	Inversa lagarna
$(p \land (p \lor q)) \equiv p$ $(p \lor (p \land q)) \equiv p$	Absorption
$(p \to q) \equiv (\neg p \lor q)$	Implikationslagen
$(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$	Kontrapositiva lagen
$(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \to q) \land (q \to p))$	Ekvivalenslagen
$(p \to q), p \models q$	Modus ponens
$(p \to q), \neg q \models \neg p$	Modus tollens
$(p \to q), (q \to r) \models p \to r$	Syllogism
$p \land q \models p$	Konjunktiv förenkling
$p \models p \lor q$	Disjunktiv förstärkning
$(p \lor q), \neg q \models p$	Disjunktiv syllogism
$p, q \models p \land q$	Konjunktionsregeln

Tabell 1: Logiska ekvivalenser och konsekvenser