Tentamen i TDDC75 Diskreta strukturer

2017-08-26, kl. 8–12

- Ta det lugnt, arbeta metodiskt, kolla dina svar.
- Kom ihåg att svaren på samtliga uppgifter måste **motiveras**, och att motiveringarna skall vara uppställda på ett sådant sätt att det går att följa hur du har tänkt. *Omotiverade svar ger 0 poäng om inget annat sägs.*
- Maxpoäng är 30 poäng. För betyg 3 krävs minst 15 poäng, för betyg 4 krävs 20 poäng och för betyg 5 krävs 25 poäng.

Lycka till!!!

1. Ett problem har uppstått i en fabrik som tillverkar glasögon. Du har fått uppdraget att avgöra vari felet ligger. Följande påståenden om glasögontillverkningen är givna.

    - Glasögon kan produceras om det produceras metallbågar och plastdetaljer och glas med rätt brytning.
    - Om det inte produceras metallbågar kan det bero på att det är för hög temperatur i fabriken, eller att det är fel sammansättning i metallegeringen .
    - Om temperaturen är för hög i fabriken så kan det inte produceras några plastdetaljer och inte heller slipade glas.
    - Om temperaturen är inte är för hög så fungerar produktionen av plastdetaljer.
    - Inga glasögon produceras.
    - Produktionen av slipade glas fungerar utan problem.

    (a) Översätt påståendena ovan till satslogiska formler.

    (b) Använd deduktion och de inferensregler som finns i formelbladet för att bevisa vilken grundorsaken är till produktionsstoppet.

    (5 poäng)

2. Låt $A = \{a, b\}$ och $B = \{0, 1\}$ vara mängder. Vilka av följande påståenden gäller?

   (a) $\{1, a\} \in 2^{A \cup B}$.

   (b) $2^A \subseteq 2^{A \cup B}$.

   (c) $\{\langle \emptyset, \emptyset \rangle\} \in 2^{A \times B}$.

   (d) $\langle \emptyset, \emptyset \rangle \in 2^A \times 2^B$.

   (e) $\{\langle a, b \rangle\} \in 2^{A \times B} \cup 2^{B \times A}$.

(5 poäng)

3. Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och låt R vara en relation på A definierade enligt följande:

$$R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$$

   (a) Beräkna R^+, dvs. det transitiva höljet av R.

   (b) Är R^+ reflexiv?

   (c) Är R^+ symmetrisk?

   (d) Är R^+ antisymmetrisk?

   (e) Är R^+ en partialordning?

(5 poäng)

4. När meddelanden som skickas över ett nätverk ska krypteras brukar man skilja på det som är innehållet i meddelandet (payload) och det som anger metadata för meddelandet (header). Låt A vara mängden av möjliga meddelandeinnehåll och B mängden av krypterade meddelandeinnehåll. Låt vidare C vara mängden av möjliga headers, och D mängden av krypterade headers.

   Låt $f : A \to B$ och $g : C \to D$ vara två krypteringsfunktioner. Definiera den kombinerade krypteringsfunktionen $h : A \times C \to B \times D$ genom $h(x, y) = (f(x), g(y))$, där $(x, y) \in A \times C$. Visa att h är bijektiv om och endast om f och g båda är bijektiva.

(5 poäng)

5. Givet ett positivt heltal n så betecknar som bekant $n!$ fakulteten för n och definieras som $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Visa med induktion att $(n!)^2 \leq (n^2)!$ gäller för alla positiva heltal n.

(5 poäng)

6. Antag att $R \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ definieras enligt

$$R = \{(0,1),(2,1),(3,4),(4,5)\}.$$

Ange den, i mängdhänseende, minsta ekvivalensrelation $S \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ som inkluderar R, dvs. sådan att $R \subseteq S$ (och sådan att om $R \subseteq T$ och T är en ekvivalensrelation, så gäller att $S \subseteq T$).

(Med **N** avses mängden av de naturliga talen $\{0,1,2,\ldots\}$.)

(5 poäng)

A Formelblad

Regel	Benämning
$\neg\neg p \equiv p$	Lagen om dubbel negation
$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$ $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$	De Morgans lagar
$(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$ $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$	Associativa lagarna
$(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	Distributiva lagarna
$(p \wedge p) \equiv p$ $(p \vee p) \equiv p$	Idempotens
$(p \wedge 1) \equiv p$ $(p \vee 0) \equiv p$	Identitetslagarna
$(p \wedge 0) \equiv 0$ $(p \vee 1) \equiv 1$	Dominans
$(p \wedge \neg p) \equiv 0$ $(p \vee \neg p) \equiv 1$	Inversa lagarna
$(p \wedge (p \vee q)) \equiv p$ $(p \vee (p \wedge q)) \equiv p$	Absorption
$(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$	Implikationslagen
$(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$	Kontrapositiva lagen
$(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \to q) \wedge (q \to p))$	Ekvivalenslagen
$(p \to q), p \models q$	Modus ponens
$(p \to q), \neg q \models \neg p$	Modus tollens
$(p \to q), (q \to r) \models p \to r$	Syllogism
$p \wedge q \models p$	Konjunktiv förenkling
$p \models p \vee q$	Disjunktiv förstärkning
$(p \vee q), \neg q \models p$	Disjunktiv syllogism
$p, q \models p \wedge q$	Konjunktionsregeln

Tabell 1: Logiska ekvivalenser och konsekvenser