Tentamen i TDDC75 Diskreta strukturer

2017-01-05, kl. 14–19

- Ta det lugnt, arbeta metodiskt, kolla dina svar.
- Kom ihåg att svaren på samtliga uppgifter måste **motiveras**, och att motiveringarna skall vara uppställda på ett sådant sätt att det går att följa hur du har tänkt. *Omotiverade svar ger 0 poäng om inget annat sägs.*
- Maxpoäng är 30 poäng. För betyg 3 krävs minst 15 poäng, för betyg 4 krävs 20 poäng och för betyg 5 krävs 25 poäng.

Lycka till!!!

1. Betrakta följande satslogiska uttryck: $(p \to q) \vee (q \to p)$

   (a) Visa genom naturlig deduktion att uttrycket är en tautlogi. Använd endast lagarna i formelbladet sist i tentan.

   (b) Gäller påståendet: $0 \models (p \to q) \vee (q \to p)$?

   (c) Gäller påståendet: $(p \to q) \vee (q \to p) \models 0$?

   (5 poäng)

2. Låt A och B vara två godtyckliga icke-tomma mängder. Avgör om följande påståenden är stämmer alltid, aldrig, eller ibland (för vissa mängder). Glöm inte att motivera ditt svar.

   (a) $A \in B$

   (b) $(A \cap B) \subseteq B$

   (c) $\forall x \in A[x \notin B] \to (B \subseteq A)$

   (d) $(A \cup B) \cap \overline{B} = A$

   (e) $|A \cup B| = |A| + |B|$

   (5 poäng)

3. Datalösningar AB har fått i uppdrag att skapa ett system för att hantera elektroniska patientjournaler till Region Mellanland. Systemet representerar data som ett antal mängder, relationer, och funktioner i en databas, som bland annat innehåller:

   - Mängden patienter P
   - Mängden vårdinrättningar V
   - En funktion $f_i : P \to V$ som anger vilken vårdinrättning en patient är inskriven på.
   - Mängden av diagnoser D.
   - En relation $R \subseteq P \times D$ sådan att $(p, d) \in R$ omm patient p har diagnosen d.
   - En funktion $f_a : P \to \{0, 1, 2, 3\}$ som för varie patient anger hur allvarligt dennes tillstånd är (0 är minst allvarligt, och 3 är mest allvarligt) för att kunna prioriteras till exempel på en akutmotagning.

   Ange för varje relation nedan en tolkning vad den betecknar och ange om den är: reflexiv, transitiv, symmetrisk, antisymmetrisk, en partialordning, en ekvivalensrelation.

   (a) $S = \{(p_1, p_2) \in P \times P \mid f_i(p_1) = f_i(p_2)\}$.

   (b) $T = \{(p_1, p_2) \in P \times P \mid \exists d \in D[(p_1, d) \in R \wedge (p_2, d) \in R]\}$.

   (c) $U = \{(p_1, p_2) \in P \times P \mid f_a(p_1) \leq f_a(p_2)\}$.

   (6 poäng)

4. Visa med hjälp av induktion att $7^n - 1$ är jämnt delbart med 6 för $n = 1, 2, 3, \ldots$

   (5 poäng)

5. Låt A och B vara godtyckliga mängder. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska och antingen bevisa eller motbevisa påståendena (symbolen $\setminus$ betecknar mängddifferens).

   (a) $A \setminus B = \overline{B \setminus A}$

   (b) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$

   (4 poäng)

6. En enkel tillståndsmaskin (utan sluttillstånd) kan beskrivas som en fyrtupel (Σ, S, s_o, T) där Σ är ett alfabet med möjlig indata, S är mängden av tillstånd, $s_0 \in S$ är initialtillståndet, och $T : S \times \Sigma \to S$ är överföringsfunktionen som för varje tillstånd och ett indata anger nästa tillstånd.

   (a) Eftersom en funktion är ett specialfall av en relation, vilket är en mängd av par så kan vi betrakta kardinaliteten av T, dvs $|T|$. Beskriv $|T|$ med hjälp av $|\Sigma|$ och $|S|$.

   (b) Låt $R \subseteq S$ vara mängden av tillstånd som är nåbara från initialtillståndet. Uttryck R med hjälp av Σ, S, s_o, T.

   (c) Låt $\Sigma = \{0, 1\}$, och $S = \{s_0, s_1\}$. Ange en möjlig funktion T, och rita upp den resulterande tillståndsmaskinen.

(5 poäng)

A Formelblad

Regel	**Benämning**
$\neg\neg p \equiv p$	Lagen om dubbel negation
$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$ $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$	De Morgans lagar
$(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$ $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$	Associativa lagarna
$(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	Distributiva lagarna
$(p \wedge p) \equiv p$ $(p \vee p) \equiv p$	Idempotens
$(p \wedge 1) \equiv p$ $(p \vee 0) \equiv p$	Identitetslagarna
$(p \wedge 0) \equiv 0$ $(p \vee 1) \equiv 1$	Dominans
$(p \wedge \neg p) \equiv 0$ $(p \vee \neg p) \equiv 1$	Inversa lagarna
$(p \wedge (p \vee q)) \equiv p$ $(p \vee (p \wedge q)) \equiv p$	Absorption
$(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$	Implikationslagen
$(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$	Kontrapositiva lagen
$(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \to q) \wedge (q \to p))$	Ekvivalenslagen
$(p \to q), p \models q$	Modus ponens
$(p \to q), \neg q \models \neg p$	Modus tollens
$(p \to q), (q \to r) \models p \to r$	Syllogism
$p \wedge q \models p$	Konjunktiv förenkling
$p \models p \vee q$	Disjunktiv förstärkning
$(p \vee q), \neg q \models p$	Disjunktiv syllogism
$p, q \models p \wedge q$	Konjunktionsregeln

Tabell 1: Logiska ekvivalenser och konsekvenser