TENTAMEN I
TDDC75 DISKRETA STRUKTURER
TEN1 och TEN2

2016-01-07

- Inga hjälpmedel är tillåtna.
- Svaren på samtliga uppgifter *måste motiveras* och motiveringarna ska vara uppställda på sådant sätt att det *går att följa hur du tänkt.* (Ett korrekt svar utan motivering ger i allmänhet ingen poäng.)
- Jour: Christer Bäckström (tel. 0705-840889) för diskret matematik och Oscar Gustafsson (tel. 0736-209483) för digitalteknik.
- Visning: Meddelas senare på kurshemsidan.

Denna tentamen innefattar både den gamla tentamen, TEN1, och den nya tentamen, TEN2, enligt följande:

TEN1: Omfattar samtliga uppgifter 1–8, dvs. både diskret matematik och digitalteknik. Denna tentamen gäller *endast gamla studenter, dvs. studenter som har läst kursen första gången tidigare än 2015.*

Maxpoäng på hela tentamen är 51 poäng. För betyg 3 krävs minst 25 poäng, för betyg 4 minst 34 poäng och för betyg 5 minst 42 poäng.

TEN2: Omfattar endast uppgifterna 1–5, dvs. enbart diskret matematik. Denna tentamen gäller *endast nya studenter, dvs. studenter som har läst kursen första gången hösten 2015.*

Maxpoäng på hela tentamen är 30 poäng. För betyg 3 krävs minst 15 poäng, för betyg 4 minst 20 poäng och för betyg 5 minst 25 poäng.

Skriv tentamenskod (TEN1 eller TEN2) för den tentamen du gör på omslaget.

Lycka till.

Denna sida avsiktligt tom

Diskret matematik

I uppgifterna betecknar $\setminus$ mängddifferens och $\circ$ betecknar funktionssammansättning, dvs. $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.

1. Låt A vara en godtycklig icke-tom mängd och låt $n = |A|$. Vad blir följande kardinaliteter? Svara med en funktion av n, dvs. ett uttryck med n som variabel, samt motivera detta.

   (a) $|2^A \setminus 2^\varnothing|$

   (b) $|2^{2^A}|$

   (c) $|2^A \times A|$

   (6p)

2. Låt $A = \{1, 2, 3\}$. Låt R och Q vara relationer på A, där vi vet att R och Q är partialordningar på A. Avgör för vart och ett av följande fall om relationen T på A alltid eller aldrig är en partialordning på A, eller om det beror på valen av R och Q:

   (a) $T = R \cup Q$

   (b) $T = R \cap Q$

   (c) $T = R \setminus Q$

   (6p)

3. Låt A vara en godtycklig icke-tom mängd av heltal, och låt $f : A \to A$ vara en godtycklig funktion. Avgör för vart och ett av följande påståenden om det gäller alltid, aldrig eller beroende på f:

   (a) Om f är injektiv så är $f \circ f$ injektiv.

   (b) Om f är surjektiv så är $f \circ f$ surjektiv.

   (c) Om $f(x) \geq x$ för alla $x \in A$ så gäller $(f \circ f)(x) \geq x$ för alla $x \in A$.

   (6p)

4. Låt M vara mängden av människor och definiera de binära relationerna G och B på M enligt följande:

   - $G(x, y)$ gäller om x är gift med y.
   - $B(x, y)$ gäller om x är barn till y.

   Avgör för var och en av dessa två relationer om den är reflexiv, symmetrisk respektive transitiv.

   (6p)

5. Den s.k. *Thue-Morse-sekvensen* är en oändlig sekvens $w_1, w_2, w_3, \ldots$ av binära strängar definierad enligt följande:

$$\begin{aligned} &w_1 = 0, \\ &w_{i+1} = w_i \cdot \overline{w_i}, \quad \text{för} \quad i > 1. \end{aligned}$$

där $\overline{w}$ betecknar logiskt komplement. De första fyra strängarna i sekvensen är alltså:

$$\begin{aligned} &w_1 = 0, && w_2 = 0 \cdot \overline{0} = 01, \\ &w_3 = 01 \cdot \overline{01} = 0110, && w_4 = 0110 \cdot \overline{0110} = 01101001. \end{aligned}$$

Visa med induktion över i att w_i innehåller lika många ettor och nollor för alla $i \geq 2$.

(6p)