TENTAMEN I
TDDC75 DISKRETA STRUKTURER
TEN1 och TEN2

2015-10-29, kl. 8-13

- Inga hjälpmedel är tillåtna.
- Svaren på samtliga uppgifter *måste motiveras* och motiveringarna ska vara uppställda på sådant sätt att det *går att följa hur du tänkt.* (Ett korrekt svar utan motivering ger i allmänhet ingen poäng.)
- Jour: Christer Bäckström (tel. 0705-840889) för diskret matematik och Oscar Gustafsson (tel. 0736-209483) för digitalteknik.
- Visning: Meddelas senare på kurshemsidan.

Denna tentamen innefattar både den gamla tentamen, TEN1, och den nya tentamen, TEN2, enligt följande:

TEN1: Omfattar samtliga uppgifter 1–8, dvs. både diskret matematik och digitalteknik. Denna tentamen gäller *endast gamla studenter, dvs. studenter som har läst kursen första gången tidigare än 2015.*

Maxpoäng på hela tentamen är 51 poäng. För betyg 3 krävs minst 25 poäng, för betyg 4 minst 34 poäng och för betyg 5 minst 42 poäng.

TEN2: Omfattar endast uppgifterna 1–5, dvs. enbart diskret matematik. Denna tentamen gäller *endast nya studenter, dvs. studenter som har läst kursen första gången i höst, 2015.*

Maxpoäng på hela tentamen är 30 poäng. För betyg 3 krävs minst 15 poäng, för betyg 4 minst 20 poäng och för betyg 5 minst 25 poäng.

Skriv tentamenskod (TEN1 eller TEN2) för den tentamen du gör på omslaget.

Lycka till.

Denna sida avsiktligt tom

Diskret matematik

1. Låt A och B vara godtyckliga icke-tomma mängder. Avgör för vart och ett av följande påståenden om det gäller för alla, vissa eller inga val av A och B.

   (a) $A \times A \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B)$

   (b) $A \times A \subseteq (A \cap B) \times (A \cap B)$

   (c) $A \times B \subseteq (A \times A) \cup (B \times B)$

   (6p)

2. Låt $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Definiera relationerna $P \subseteq A \times B$ och $Q \subseteq B \times A$ enligt följande

$$P = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$$
$$Q = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$$

   Definiera relationen R på A som sammansättningen $R = P \circ Q$. Avgör om R har var och en av följande egenskaper:

   (a) reflexiv,

   (b) symmetrisk,

   (c) antisymmetrisk,

   (d) transitiv.

   (6p)

3. Avgör för var och en av följande funktioner $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ och $g : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ vilka av egenskaperna injektiv, surjektiv och bijektiv den har.

   (a) Definiera f som $f(n) = n^2 - (n-1)^2$ för alla $n \geq 1$.

   (b) Definiera g som

$$g(n) = \begin{cases} 3n + 1, & \text{om } n \text{ är udda} \\ \frac{n}{2}, & \text{annars} \end{cases}$$

   (6p)

4. Låt Σ_1 och Σ_2 vara två godtyckliga icke-tomma alfabet. Låt $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ och $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ vara två godtyckliga icke-tomma språk. Avgör för vart och ett av följande påståenden om det gäller för alla, vissa eller inga val av Σ_1, Σ_2, L_1 och L_2.

   (a) $L_1 \cup L_2 \subseteq (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*$

   (b) $L_1 \cap L_2 \subseteq (\Sigma_1 \cap \Sigma_2)^*$

(c) $L_1 \setminus L_2 \subseteq (\Sigma_1 \setminus \Sigma_2)^*$

(där $\setminus$ betecknar mängddifferens.)

(6p)

5. Definiera funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ så att $f(0) = f(1) = 1$ och

$$f(n) = \frac{f(n-1) + f(n-2)}{2}, \quad \text{för} \quad n \geq 2.$$

Visa med induktion över n att $f(n) = 1$ för alla $n \geq 0$.

(6p)