TENTAMEN I
TDDC75 DISKRETA STRUKTURER

2015-01-09, kl.14-19, Sal TER2

- Inga hjälpmedel är tillåtna.
- Svaren på samtliga uppgifter *måste motiveras* och motiveringarna ska vara uppställda på sådant sätt att det *går att följa hur du tänkt*. (Ett korrekt svar utan motivering ger i allmänhet ingen poäng.)
- Jour: Christer Bäckström (tel. 0705-840889) för diskret matematik och Mattias Krysander (tel. 282198) för digitalteknik.
- Visning: Meddelas senare på kurshemsidan.
- Maxpoäng på hela tentamen är 50 poäng. För betyg 3 krävs minst 25 poäng, för betyg 4 minst 34 poäng och för betyg 5 minst 42 poäng.

Lycka till.

Diskret matematik

I uppgifterna betecknar $\mathbb{N}$ de naturliga talen.
Glöm inte att motivera dina svar!

1. Låt $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vilka av följande mängder är partitioner på S: (5 p)

   (a) $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}\}$?
   (b) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$?
   (c) $\{\{\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$?
   (d) $\{A, \overline{A}\}$, där $A = \{x \in S \mid x > 5\}$?

   Om något exempel bryter mot flera villkor för att vara en partition så ska du ange samtliga dessa.

2. Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och låt R och Q vara relationer på A definierade enligt följande: (6 p)

   $$R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$$

   $$Q = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$$

   Ange för var och en av R och Q om den är:

   (a) reflexiv?

(b) symmetrisk?

(c) antisymmetrisk?

(d) transitiv?

3. Vi definierar funktionssammansättning som vanligt, dvs. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Låt f, g och h vara funktioner från $\mathbb{N}$ till $\mathbb{N}$. (6 p)

   (a) Gäller det för alla val av funktioner f, g och h att $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$?

   (b) Finns det något val av funktioner f, g och h sådant att $(f \circ (g \circ h))(x) = x$ för alla $x \in \mathbb{N}$, och där ingen av f, g och h får vara identitetsfunktionen.

4. Antag en oändligt stor blomsteräng. Går det att plocka alla blommor på oändlig tid? (6 p)

   För enkelhets får du antaga att ängen har ett hörn och att den har två raka sidor som utsträcker sig oändligt långt åt öster resp. norr (vi bortser förstås från att jorden är rund och ändlig). Blommorna växer inte heller oändligt tätt, dvs. det finns ett ändligt antal blommor per kvadratmeter. Om du gör ytterligare antaganden, ange då dessa tydligt.

5. Definiera funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som (6 p)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{om } \; n \leq 3 \\ f(n-1) + f(n-2) + f(n-3), & \text{om } \; n > 3. \end{cases}$$

   Visa med induktion över värdet på n att $f(n) < 2^n$ för alla $n \geq 1$.