TENTAMEN I
TDDC75 DISKRETA STRUKTURER

2014-10-30, kl. 8–13, Sal U1 och U3

- Inga hjälpmedel är tillåtna.
- Svaren på samtliga uppgifter *måste motiveras* och motiveringarna ska vara uppställda på sådant sätt att det *går att följa hur du tänkt*. (Ett korrekt svar utan motivering ger i allmänhet ingen poäng.)
- Jour: Christer Bäckström (tel. 0705-840889) för diskret matematik och Mattias Krysander (tel. 282198) för digitalteknik.
- Visning: Meddelas senare på kurshemsidan.
- Maxpoäng på hela tentamen är 50 poäng. För betyg 3 krävs minst 25 poäng, för betyg 4 minst 34 poäng och för betyg 5 minst 42 poäng.

Lycka till.

Diskret matematik

I uppgifterna betecknar $\mathbb{N}$ de naturliga talen.
Glöm inte att motivera dina svar!

1. Låt A och B vara två mängder om vilka vi vet att (6 p)

$$|A \cup B| \leq 2\,|A \cap B|.$$

   (a) Kan endera eller båda av mängderna A och B vara tomma mängden?
   (b) Kan A och B vara samma icke-tomma mängd?
   (c) Om $|A| = |B| = 10$, hur många gemensamma element måste då A och B minst ha?

2. Låt A vara en godtycklig mängd och låt $R \subseteq A \times A$ och $Q \subseteq A \times A$ vara relationer på A. (6 p)

   (a) Om R är reflexiv, räcker något av villkoren $R \subset Q$ eller $Q \subset R$ för att garantera att även Q är reflexiv?
   (b) Om R är symmetrisk, räcker något av villkoren $R \subset Q$ eller $Q \subset R$ för att garantera att även Q är symmetrisk?
   (c) Om R är antisymmetrisk, räcker något av villkoren $R \subset Q$ eller $Q \subset R$ för att garantera att även Q är antisymmetrisk?

3. Låt $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ vara en funktion definierad som $f(n) = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (6 p)

   (a) Ange funktionsvärdena för $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ och $f(5)$.

   (b) Är f injektiv?

   (c) Är f surjektiv?

   (d) Existerar den inversa funktionen $f^{-1} : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$?

4. Låt L vara mängden av alla länder och S mängden av alla städer. Definiera relationen $R \subseteq L \times L$ så att $R(x, y)$ uttrycker att land x gränsar till land y. Definiera relationen $Q \subseteq S \times S$ så att $Q(x, y)$ uttrycker att städerna x och y ligger i samma land. Definiera funktionen $f : S \to L$ så att $f(x)$ är det land som staden x ligger i. Definiera funktionen $g : L \to S$ så att $g(x)$ anger huvudstaden i landet x. (6 p)

   (a) Låt x och y vara två städer. Vad säger uttrycket $R(f(x), f(y))$ om dessa?

   (b) Vad vet vi om länderna x och y om vi vet att $Q(g(x), g(y))$ gäller?

   (c) Betrakta den sammansatta funtionen $h = f \circ g$, dvs. $h(x) = f(g(x))$. Ge den enklast möjliga definitionen av funktionen h.

5. Definiera funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som (5 p)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{om } n = 0 \\ f(n-1) + n, & \text{om } n > 0. \end{cases}$$

   Visa med induktion över värdet på n att $f(n) \leq n^2$ för alla $n \geq 0$.