# Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings universitet

(fylls i av ansvarig)

| | |
|---|---|
| **Datum för tentamen** | 2013-08-31 |
| **Sal** | TER1 |
| **Tid** | 8-13 |
| **Kurskod** | TDDC75 |
| **Provkod** | TEN1 |
| **Kursnamn/benämning** | Diskreta Strukturer |
| **Institution** | *IDA* |
| **Antal uppgifter som ingår i tentamen** | 8 |
| **Antal sidor på tentamen (inkl. försättsbladet)** | 4 |
| **Jour/Kursansvarig** | Christer Bäckström (del 1) / Mattias Krysander (del 2) |
| **Telefon under skrivtid** | 0705-840889 / 282198 |
| **Besöker salen ca kl.** | CB c:a kl. 9 |
| **Kursadministratör (namn + tfnnr + mailadress)** | Liselotte Lundberg, 281278<br>liselotte.lundberg@liu.se |
| **Tillåtna hjälpmedel** | Inga |
| **Övrigt (exempel när resultat kan ses på webben, betygsgränser, visning, övriga salar tentan går i m.m.)** | |
| **Vilken typ av papper ska användas, rutigt eller linjerat** | Rutat |
| **Antal exemplar i påsen** | |

# TENTAMEN I
# TDDC75 DISKRETA STRUKTURER

2013-08-31, kl. 8-13, Sal TER1

- Inga hjälpmedel är tillåtna.
- Svaren på samtliga uppgifter *måste motiveras* och motiveringarna ska vara uppställda på sådant sätt att det *går att följa hur du tänkt.* (Ett korrekt svar utan motivering ger i allmänhet ingen poäng.)
- Jour: Christer Bäckström (tel. 0705-840889) för diskret matematik och Mattias Krysander (tel. 282198) för digitalteknik.
- Visning: Meddelas senare på kurshemsidan.
- Maxpoäng på hela tentamen är 50 poäng. För betyg 3 krävs minst 25 poäng, för betyg 4 minst 34 poäng och för betyg 5 minst 42 poäng.

Lycka till.

## Diskret matematik

I uppgifterna betecknar $\mathbb{N}$ de naturliga talen och $\mathbb{R}$ de reella talen.

1. Låt $A$ och $B$ vara mängder och $f : A \to B$ en funktion. Som bekant skriver man ofta $f(A)$ för att beteckna mängden av de värden i $B$ som kan vara avbildning av något element i $A$. Mera generellt brukar man för godtycklig delmängd $S \subseteq A$ definiera $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$. (6 p)

   (a) Gäller det att $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$ för godtyckliga mängder $S \subseteq A$ och $T \subseteq A$?

   (b) Gäller det att $f(S - T) = f(S) - f(T)$ för godtyckliga mängder $S \subseteq A$ och $T \subseteq A$ (där "$-$" betecknar mängddifferens)?

   (c) Gäller det att $f(\overline{S}) = \overline{f(S)}$ för godtycklig mängd $S \subseteq A$?

2. Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$ vara en mängd och $R \subseteq A \times A$ en relation över $A$. Låt $\overline{R} = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid \langle x, y\rangle \notin R\}$, dvs. $\overline{R}$ betecknar den komplementära relationen till $R$. Finns det något val av $R$ så att (6 p)

   (a) både $R$ och $\overline{R}$ är reflexiva?

   (b) både $R$ och $\overline{R}$ är symmetriska?

   (c) både $R$ och $\overline{R}$ är transitiva?

3. (5 p)

(a) Låt $A$ vara en godtycklig mängd. Finns det någon funktion $f : A \to A$ sådan att $f = f^{-1}$, dvs. $f$ är sin egen invers?

(b) Låt $A$, $B$ och $C$ vara godtyckliga mängder. Låt $f : A \to B$ och $g : B \to C$ vara bijektiva funktioner och låt som vanligt $f^{-1}$ och $g^{-1}$ beteckna motsvarande inversa funktioner. Betrakta den sammansatta funktionen $g \circ f$ och dess invers $(g \circ f)^{-1}$. Visa att $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1}) \circ (g^{-1})$.

4. Definiera relationen $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ som $R = \{\langle x, y \rangle \mid x + y < xy\}$. För en godtycklig delmängd $S \subseteq \mathbb{N}$ definierar vi som vanligt restriktionen $R_{|S}$ av $R$ till $S$ som $R_{|S} = R \cap (S \times S)$. Vilken är den största möjliga delmängden $S \subseteq \mathbb{N}$ sådan att (6 p)

(a) $R_{|S}$ är reflexiv?

(b) $R_{|S}$ är symmetrisk?

(c) $R_{|S}$ är antisymmetrisk?

5. Som bekant gäller att $(x + y)^2 \geq x^2 + y^2$ för $x, y \in \mathbb{N}$. Betrakta följande två generaliseringar. (6 p)

(a) Antag $x, y \in \mathbb{N}$. Visa med induktion att $(x + y)^n \geq x^n + y^n$ för alla positiva heltal $n$, dvs. att olikheten gäller för godtyckligt gradtal.

(b) Antag en oändlig mängd variabler $x_1, x_2, x_3, \ldots$ över $\mathbb{N}$. Visa med induktion över $n$ att $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ för alla positiva heltal $n$, dvs. olikheten gäller för godtyckligt många variabler.

(Tips: Kom ihåg att $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.)

**TDDC75 Digitalteknikdelen**
**31 augusti, 2013**

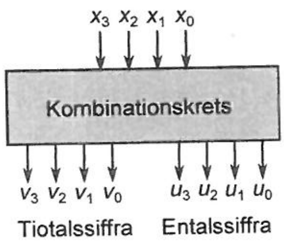
**Uppgift 6.** Realisera med valfritt antal 2-ingångars NAND- och 2-ingångars NOR-grindar en 4-ingångars OR-grind. För poäng krävs att lösningen innehåller ett minimalt antal grindar. (2 poäng)

---

**Uppgift 7.** Ett kombinatoriskt nät ska konstrueras enligt figur 1 där $x = (x_3, x_2, x_1, x_0)$, $u = (u_3, u_2, u_1, u_0)$ och $v = (v_3, v_2, v_1, v_0)$ är decimala siffror 0-9 i BCD-kod. Kretsen ska kvadrera insignalen $x$ så att utsignalerna $v$ och $u$ är kvadratens tiotal respektive ental, dvs följande likhet skall gälla

$$10v + u = x^2$$

Till exempel om $x = 0110$, dvs siffran 6, så skall utsignalen blir $6^2 = 36$. Detta innebär att $v = 0011$, dvs siffran 3, och $u = 0110$, dvs siffran 6. Konstruera det nät som genererar $u$ med ett minimalt AND-OR nät. Inverterare får även användas. Observera att $v$ inte behövs realiseras i uppgiften.




Figur 1: In- och ut-signaler till en kombinationskrets.

(9 poäng)

---

**Uppgift 8.** En 2-bitars räknare som skall räkna i Graykod och vara försedd med två modsignaler $m_0$ och $m_1$ som styr beteende enligt följande tabell:

| $m_1 m_0$ | beteende |
|---|---|
| 00 | synkorn nollställning, dvs övergång till tillståndet 00. |
| 01 | uppräkning i Graykod, 00, 01, 11, 10, 00, 01, $\cdots$ |
| 10 | nedräkning i Graykod, 00, 10, 11, 01, 00, 10, $\cdots$ |
| 11 | synkron ettställning, dvs övergång till tillståndet 11. |

Räknaren ska ha tre utsignaler, dels räknarens tillstånd $u = (u_1, u_0)$ och dels en rippel carry signal $u_2$ som skall vara ett om och endast om räknaren är i mod uppräkning och befinner sig i tillstånd 10 eller är i mod nedräkning och är i tillstånd 00.

För full poäng krävs ett korrekt tillståndsdiagram, tillståndstabell, Booleska uttryck samt en realisering med NAND-grindar, inverterare och valfria vippor. Onödigt komplicerade lösningar ger poängavdrag och asynkrona lösningar ger 0 poäng. (10 poäng)