Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2018–10–25 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel är tillåtna (penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva *får* användas).

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter duggans slut. Resultat meddelas i e-brev.

1. (a) Ange ett polynom $p(x)$ av grad minst 1 sådant att $p(3) = -17$ är p:s största värde. (1 p)
   (b) Beräkna $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{2+3i} + i\dfrac{1}{2i-3}\right)$. (1 p)
   (c) Lös olikheten $\dfrac{1}{x} > x$. (1 p)
2. (a) Lös ekvationen $\sin\left(2\alpha + \dfrac{\pi}{5}\right) = \sin\left(5\alpha - \dfrac{9\pi}{10}\right)$. (1 p)
   (b) Bestäm v om man vet att $\cos v = \dfrac{1}{5}$. (1 p)
   (c) Beräkna $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$. (1 p)
3. (a) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är $8^x - 4^{x+\frac{1}{2}} = 3(2^x - 2)$? (2 p)
   (b) Lös ekvationen $\dfrac{\ln(x^2+2x+1)}{\ln(x+1)} = \ln(x-1)$. (1 p)
4. (a) Skriv $f(x) = \cos x \sin 3x + \cos 6x \sin 2x$ som en summa av cos- och/eller sin-termer. (2 p)
   (b) Förenkla $\tan\left(1 + \dfrac{\arcsin(\sin 3)}{\arccos(\cos 3)}\right)$. (1 p)
5. Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för f^{-1} om $f(x) = \ln\left(1 - \ln(1+2x)\right)$.
6. Finn alla $z \in \mathbf{C}$ som uppfyller $(z - 3 - 3i)^5 = (3i - \sqrt{3})(-3 - 3i)$.
7. Lös ekvationen $\cos(2^{-1}x)\cos(2^{-2}x) \cdot \ldots \cdot \cos(2^{-n}x) = 2^{-n}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Lösningsförslag TATM79 2018-10-25

1. (a) Låt $p(x) = -17 - (x-3)^2 = -x^2 + 6x - 26$. Från den kvadratkompletterade formen ser vi att $p(x) \leq -17$ för alla $x \in \mathbf{R}$ och att $p(3) = -17$.

   (b) Vi förlänger med konjugaten och ser att

$$\frac{1}{2+3i} + \frac{i}{2i-3} = \frac{2-3i}{13} + \frac{i(-2i-3)}{13} = \frac{4-6i}{13},$$

   så imaginärdelen ges således av $-\dfrac{6}{13}$.

   (c) Vi sorterar termerna och faktoriserar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} > x \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x} = \frac{(1-x)(1+x)}{x} = -\frac{(x-1)(x+1)}{x} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x+1)}{x} < 0. \end{aligned}$$

   En teckentabell:

		-1		0		1	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$	$-$	0	$+$	☠	$-$	0	$+$

   Vi ser i tabellen att uttrycket är negativt precis då $x < -1$ eller $0 < x < 1$.

   Svar: (a) $-x^2 + 6x - 26$ (b) $-\dfrac{6}{13}$ (c) $x < -1$ eller $0 < x < 1$.

2. (a)

$$\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(5\alpha - \frac{9\pi}{10}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 2\alpha + \dfrac{\pi}{5} = 5\alpha - \dfrac{9\pi}{10} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z} \\ \qquad \text{eller} \\ 2\alpha + \dfrac{\pi}{5} = \pi - \left(5\alpha - \dfrac{9\pi}{10}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 3\alpha = \dfrac{11\pi}{10} - 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z} \\ \quad \text{eller} \\ 7\alpha = \dfrac{17\pi}{10} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{11\pi}{30} - \dfrac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z} \\ \text{eller} \\ \alpha = \dfrac{17\pi}{70} + \dfrac{2\pi n}{7},\ n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

   (b)

$$\cos v = \frac{1}{5} \quad \Leftrightarrow \quad v = \pm \arccos\left(\frac{1}{5}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

   (c) Eftersom $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$ så är

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right).$$

Låt $v = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$. Då är $0 < v < \frac{\pi}{2}$ och eftersom $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$, så följer det att $\cos v = \sqrt{1 - \sin^2 v}$ eftersom $\cos v > 0$ är nödvändigt. Alltså blir

$$\cos v = \sqrt{1 - \left(\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Svar: (a) $\alpha = \frac{11\pi}{30} - \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $\alpha = \frac{17\pi}{70} + \frac{2\pi n}{7}$, $n \in \mathbf{Z}$
(b) $v = \pm\arccos\left(\frac{1}{5}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

3. (a) Låt $t = 2^x$. Då gäller att

$$8^x - 4^{x+1/2} = 3(2^x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad t^3 - 2t^2 = 3t - 6 \quad \Leftrightarrow \quad t^3 - 2t^2 - 3t + 6 = 0.$$

Vi gissar en rot och finner att $t = 2$ löser ekvationen. Polynomdivision visar sedan att $t^3 - 2t^2 - 3t + 6 = (t-2)(t^2-3)$, så de resterande lösningarna ges av $t = \pm\sqrt{3}$. Alternativt kan vi se detta genom

$$t^3 - 2t^2 = 3t - 6 \quad \Leftrightarrow \quad t^2(t-2) = 3(t-2) \quad \Leftrightarrow \quad t = 2 \text{ eller } t^2 = 3.$$

Eftersom $t > 0$ så ger $t = -\sqrt{3}$ ingen lösning. För $t = \sqrt{3}$ gäller att

$$2^x = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln\sqrt{3}}{\ln 2} = \frac{\ln 3}{2\ln 2}$$

och för $t = 2$ gäller att

$$2^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

(b) För att alla logaritmer i ekvationen ska vara definierade krävs att

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -1,$$

att $x > -1$, samt att $x > 1$. Vi måste alltså kräva att $x > 1$. För dessa x gäller att

$$\frac{\ln(x+1)^2}{\ln(x+1)} = \ln(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\ln(x+1)}{\ln(x+1)} = \ln(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \ln(x-1)$$
$$\Leftrightarrow \quad e^2 = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 + e^2,$$

som uppfyller kravet.

Svar: (a) $x = \frac{\ln 3}{2\ln 2}$ eller $x = 1$ (b) $x = 1 + e^2$.

4. (a) Två Euler-omskrivningar visar att

$$\cos x \cdot \sin 3x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i4x} - e^{-i2x} + e^{i2x} - e^{-i4x}}{2i}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sin 4x + \sin 2x\right),$$

och

$$\cos 6x \cdot \sin 2x = \left(\frac{e^{i6x} + e^{-i6x}}{2}\right)\left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i8x} - e^{i4x} + e^{-i4x} - e^{-i8x}}{2i}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sin 8x - \sin 4x\right),$$

så

$$\cos x \cdot \sin 3x + \cos 6x \cdot \sin 2x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin 2x\right).$$

(b) Enligt definitionerna gäller att

$$u = \arccos(\cos 3) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos u = \cos 3, \\ u \in [0, \pi], \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = \pm 3 + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}, \\ u \in [0, \pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad u = 3$$

och

$$v = \arcsin(\sin 3) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin v = \sin 3, \\ v \in [-\pi/2, \pi/2], \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} v = 3 + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}, \ \text{eller } v = \pi - 3 + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}, \\ v \in [-\pi/2, \pi/2]. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad v = \pi - 3.$$

Alltså kommer

$$\tan\left(1 + \frac{\arcsin(\sin 3)}{\arccos(\cos 3)}\right) = \tan\left(1 + \frac{\pi - 3}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Svar: (a) $\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x)$ (b) $\sqrt{3}$

5. Vi börjar med att hitta definitionsmängden D_f. För att den inre logaritmen ska vara definierad så måste $1 + 2x > 0$. För att nästa logaritm ska vara definierad måste

$$1 - \ln(1+2x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1+2x) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 1+2x < e \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}(e-1)$$

eftersom ln är strängt växande. Alltså kommer D_f ges av

$$D_f = \left]-\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}(e-1)\right[.$$

För $x \in D_f$ så gäller att

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln(1 - \ln(1+2x)) \quad \Leftrightarrow \quad e^y = 1 - \ln(1+2x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln(1+2x) = 1 - e^y \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2x = \exp(1 - e^y)$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}(\exp(1 - e^y) - 1).$$

Alltså kommer

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(\exp(1 - e^y) - 1).$$

Svar: $D_f = \left]-\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}(e-1)\right[$ och $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(\exp(1-e^y) - 1)$.

6. Det komplexa talet $3i - \sqrt{3}$ ligger i andra kvadranten (Rita!) och kan skrivas

$$3i - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i2\pi/3}.$$

På samma sätt (Rita!) (i tredje kvadranten),

$$-3 - 3i = 3\sqrt{2}e^{i5\pi/4}.$$

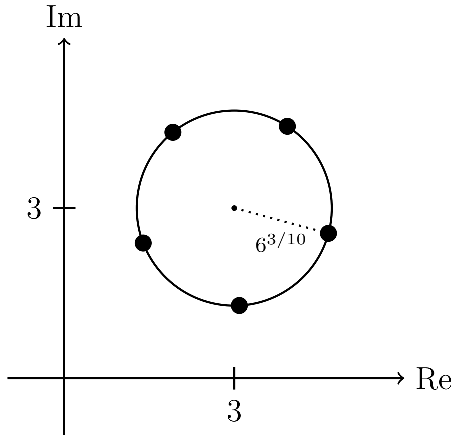
Detta medför att

$$\left(3i - \sqrt{3}\right)(-3 - 3i) = 6\sqrt{6}e^{i\pi(2/3+5/4)} = 6\sqrt{6}e^{i23\pi/12} = 6\sqrt{6}e^{-i\pi/12}.$$

Låt nu $z - 3 - 3i = w$ och $w = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

$$w^5 = r^5 e^{i5\theta} = 6\sqrt{6}\, e^{-i\pi/12} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^5 = 6\sqrt{6} = 6^{3/2},\ r \geq 0, \\ 5\theta = -\pi/12 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{1}$$

Detta visar att $r = 6^{3/10}$ och $\varphi = -\dfrac{\pi}{60} + \dfrac{2n\pi}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$.



Eftersom $z = 3 + 3i + w$ blir nu våra lösningar

$$z = 3 + 3i + 6^{3/10}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{60} + \frac{2n\pi}{5}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 5$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.

Svar: $z = 3 + 3i + 6^{3/10}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{60} + \frac{2n\pi}{5}\right)}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

7. Om vi betraktar formeln $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, så ser vi att

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2^2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} = \cdots = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{x}{2}.$$

Om vi antar att $2^{-n}x \neq k\pi$ för alla $k \in \mathbf{Z}$, så kan vi dela med $2^n \sin \dfrac{x}{2^n}$ och erhåller då att

$$\frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \cos \frac{x}{2^n} \cdot \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{x}{2}.$$

Alltså ges ekvationen i uppgiften av

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = 2^{-n} \quad &\Leftrightarrow \quad \sin x = \sin \frac{x}{2^n} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{x}{2^n} + 2\pi m \text{ eller } x = \pi - \frac{x}{2^n} + 2\pi m, \end{aligned}$$

där $m \in \mathbf{Z}$ och vi antar att $2^{-n}x \neq k\pi$ för alla $k \in \mathbf{Z}$. Vi erhåller alltså att

$$x = \frac{x}{2^n} + 2\pi m \quad \Leftrightarrow \quad x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2\pi m \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2\pi m}{1 - 2^{-n}} = \frac{2^{n+1}\pi m}{2^n - 1}$$

eller

$$x = \pi - \frac{x}{2^n} + 2\pi m \quad \Leftrightarrow \quad x\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = \pi(2m+1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi(2m+1)}{1 + 2^{-n}} = \frac{2^n\pi(2m+1)}{2^n + 1}.$$

Det återstår att reda ut när dessa lösningar träffar multipler $2^n k\pi$ för $k \in \mathbf{Z}$ eftersom dessa inte är lösningar. Detta faktum följer av att alla cos-faktorer blir 1 eller -1. Vi ser att

$$\frac{2\pi m}{1-2^{-n}} = 2^n \pi k \quad \Leftrightarrow \quad k(2^n-1) = 2m,$$

så $k = 2p$ för något $p \in \mathbf{Z}$ är nödvändigt. Således måste vi kräva att $m \neq p(2^n-1)$ för alla $p \in \mathbf{Z}$. På liknande sätt ser vi att

$$\frac{\pi(2m+1)}{1+2^{-n}} = 2^n \pi k \quad \Leftrightarrow \quad k(2^n+1) = 2m+1,$$

så $k = 2p+1$ för något $p \in \mathbf{Z}$. I så fall gäller att

$$(2^n+1)(2p+1) = 2m+1 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{n+1}p + 2^n + 2p = 2m \quad \Leftrightarrow \quad m = p(2^n+1) + 2^{n-1}.$$

Vi måste alltså kräva att $m \neq p(2^n+1) + 2^{n-1}$.

Svar: $x = \pi \dfrac{2^{n+1}m}{2^n-1}$, $m \in \mathbf{Z}$ så att $m \neq p(2^n-1)$ för alla $p \in \mathbf{Z}$ eller $x = \pi \dfrac{2^n(2m+1)}{2^n+1}$, $m \in \mathbf{Z}$ så att $m \neq p(2^n+1) + 2^{n-1}$ för alla $p \in \mathbf{Z}$.