Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2018–10–01 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel är tillåtna (penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva *får* användas).

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter duggans slut. Resultat meddelas i e-brev.

1. (a) Lös ekvationen $\sqrt{12-2x^2}-x=4$. (2 p)

   (b) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=2}^{101}\left(4^k+2^k\right)$. (1 p)

2. (a) För vilka x är $\dfrac{\ln(x+4)}{\ln(8-x)}=2$? (2 p)

   (b) Vilka reella x uppfyller sambandet $e^x-4e^{-x}=3$? (1 p)

3. (a) Finn alla lösningar till ekvationen $\cos 2x=\sin 3x$. (1 p)

   (b) Antag att $\cos v=\dfrac{1}{5}$. Bestäm alla värden som $\sin 2v$ och $\cos 2v$ kan anta. (1 p)

   (c) Beräkna $\sin\left(\arctan\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)$. (1 p)

4. Lös ekvationen $\sin 3x-\cos 3x=1$.

5. Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för f^{-1} om $f(x)=\dfrac{1}{\ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)}$.

6. Beräkna $v=2\arctan\sqrt{2}+\arccos\dfrac{1}{3}$.

7. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin 2kx=\frac{\sin(n+1)x\cdot\sin nx}{\sin x}$ för $n\geq 1$ och $x\neq m\pi\,,\ m\in\mathbf{Z}$.

Lösningsförslag TATM79 2018-10-01

1. (a) Låt oss stuva om i ekvationen för att sedan kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$\begin{aligned}
\sqrt{12-2x^2}-x=4 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{12-2x^2}=4+x \\
&\Rightarrow \quad 12-2x^2=(4+x)^2=16+8x+x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 3x^2+8x+4=3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+2)=0 \\
&\Leftrightarrow \quad x=-\frac{2}{3} \quad \text{eller} \quad x=-2.
\end{aligned}$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x=-2$ ser vi att

$$\text{VL}=\sqrt{12-8}+2=\sqrt{4}+2=4$$

så $x=-2$ är en lösning. Om $x=-\frac{2}{3}$ är

$$\text{VL}=\sqrt{12-2\cdot\frac{4}{9}}+\frac{2}{3}=\sqrt{\frac{100}{9}}+\frac{2}{3}=\frac{12}{3}=4.$$

Eftersom vänsterled och högerled stämmer överens även här så är $x=-\frac{2}{3}$ en lösning.

(b) Vi delar upp summan i två delar som var och en är geometriska med $101-2+1=100$ termer. Den första summan har 4^2 som första term och kvoten 4 medan den andra summan har 2^2 som första term och kvoten 2:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{101}(4^k+2^k)&=\sum_{k=2}^{101}4^k+\sum_{k=2}^{101}2^k=4^2\cdot\frac{4^{100}-1}{4-1}+2^2\cdot\frac{2^{100}-1}{2-1} \\
&=\frac{16}{3}\left(4^{100}-1\right)+4(2^{100}-1)=\frac{1}{3}4^{102}+2^{102}-\frac{28}{3}.
\end{aligned}$$

Svar: (a) $x=-2$ eller $x=-\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{3}4^{102}+2^{102}-\frac{28}{3}$.

2. (a) För att alla logaritmer i ekvationen ska vara definierade krävs att $x>-4$ och $x<8$. Antag att x uppfyller dessa villkor. Då gäller (eftersom ln är injektiv) att

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x+4)}{\ln(8-x)}=2 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(x+4)=2\ln(8-x)=\ln(8-x)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x+4=(8-x)^2=64-16x+x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-17x+60=0 \\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{17}{2}\pm\frac{7}{2},
\end{aligned}$$

där $x=12$ inte uppfyller att $x<8$ men $x=5$ uppfyller båda villkoren.

(b) Låt $t=e^x>0$. Vi kan då skriva ekvationen som

$$t-\frac{4}{t}=3 \quad \Leftrightarrow \quad t^2-3t-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=4 \text{ eller } t=-1.$$

Eftersom $t>0$ så kan endast $t=4$ ge en lösning:

$$4=t=e^x \quad \Leftrightarrow \quad x=\ln 4.$$

Svar: (a) $x=5$ (b) $x=\ln 4$.

3. (a) Eftersom

$$\sin 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

så gäller att

$$\cos 2x = \sin 3x \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \quad \Leftrightarrow \quad \pm 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2\pi n,$$

så

$$5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

eller

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Notera att vinklarna $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ redan finns med bland de första vinklarna vi fick fram, så det räcker med svaret $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$.

(b) Då $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ så gäller att

$$\sin v = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{24}}{5} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

om $\cos v = \frac{1}{5}$. Alltså måste

$$\sin 2v = 2\sin v \cos v = \pm\frac{4\sqrt{6}}{25}$$

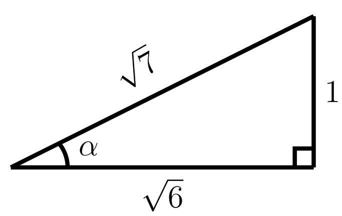
och

$$\cos 2v = 2\cos^2 v - 1 = \frac{2}{25} - 1 = -\frac{23}{25}.$$

(c) Vi vet att $\arctan(-t) = -\arctan(t)$ och $\sin(-t) = -\sin t$, så

$$\sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) = -\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right).$$

Eftersom $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ kan vi direkt rita upp en rätvinklig hjälptriangel där $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Ifrån denna triangel ser vi att $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$.



Med andra ord gäller att $\sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) = -\sin(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Svar: (a) $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$, (b) $\sin 2v = \pm\frac{4\sqrt{6}}{25}$ och $\cos 2v = -\frac{23}{25}$, (c) $-\frac{1}{\sqrt{7}}$.

4. Vi använder oss av hjälpvinkelmetoden och skriver om vänsterledet som $C\sin(3x + v)$ med $C > 0$. Då ska alltså, enligt additionsformeln för sinus,

$$C\sin(3x + v) = C\left(\sin 3x \cos v + \cos 3x \sin v\right) = \sin 3x - \cos 3x$$

Genom att, till exempel, låta $x = 0$ och $x = \pi/6$, erhåller vi sambanden

$$\begin{cases} C\sin v &= -1, \\ C\cos v &= 1. \end{cases}$$

För att bestämma C kvadrerar vi dessa ekvationer och summerar för att finna att

$$C^2 = C^2(\sin^2 v + \cos^2 v) = 2.$$

Alltså är $C = \sqrt{2}$ ett lämpligt val, och vi finner v genom att lösa

$$\begin{cases} \cos v &= \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin v &= \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad v = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Vi väljer $v = -\dfrac{\pi}{4}$. Vi ska nu lösa ekvationen

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}, \\ \quad \text{eller} \\ 3x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vi erhåller alltså lösningarna

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3} \qquad \text{eller} \qquad x = \frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{3}$$

för $n \in \mathbf{Z}$.

Svar: $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. För att logaritmen ska vara definierad måste vi kräva att

$$\frac{2x-1}{x+3} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3 \quad \text{eller} \quad x > \frac{1}{2}.$$

Detta kan ses med hjälp av tex en teckentabell:

		-3		$\frac{1}{2}$	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{2x-1}{x+3}$	$+$	☠	$-$	0	$+$

Vidare så får nämnaren inte bli noll, vilket sker precis då

$$\ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{x+3} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4.$$

Definitionsmängden blir således

$$D_f =]-\infty,\ -3[\ \cup \left]\frac{1}{2},\ 4\right[\cup]4,\ \infty[.$$

För $x \in D_f$ gäller att

$$y = \frac{1}{\ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)} \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) = \frac{1}{y} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2x-1}{x+3} = \exp\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad x\left(2-\exp\left(\frac{1}{y}\right)\right) = 1+3\exp\left(\frac{1}{y}\right) \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{1+3\exp\left(\frac{1}{y}\right)}{2-\exp\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

Alltså kommer ett uttryck för inversen att ges av $f^{-1}(y) = \dfrac{1+3\exp\left(\frac{1}{y}\right)}{2-\exp\left(\frac{1}{y}\right)}$.

Svar: $D_f =]-\infty,\ -3[\ \cup \left]\frac{1}{2},\ 4\right[\cup]4,\ \infty[$ och $f^{-1}(y) = \dfrac{1+3\exp\left(\frac{1}{y}\right)}{2-\exp\left(\frac{1}{y}\right)}$.

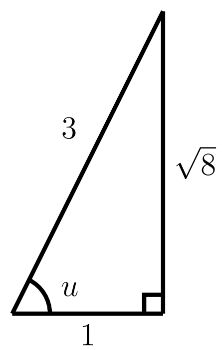
6. Additionsformeln för tangens visar att

$$\tan\left(2\arctan\left(\sqrt{2}\right) + \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\tan\left(2\arctan\left(\sqrt{2}\right)\right) + \tan\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{1-\tan\left(2\arctan\left(\sqrt{2}\right)\right)\tan\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}.$$

Genom att utnyttja additionsformeln igen följer det att

$$\tan\left(2\arctan\left(\sqrt{2}\right)\right) = \frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}.$$

Att hitta $\tan(\arccos(1/3))$ är lite värre, men inte så mycket. Låt $u = \arccos(1/3)$. Då är $\cos u = 1/3$ och $0 < u < \pi/2$. Vi ritar en rätvinklig triangel med lämpliga katetlängder. Ur denna ser vi direkt att att $\tan(u) = \sqrt{8}$:



Alltså kommer

$$\tan\left(2\arctan\left(\sqrt{2}\right) + \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 0.$$

Då

$$\tan v = 0 \quad\Leftrightarrow\quad v = n\pi,\ n \in \mathbf{Z},$$

så måste

$$2\arctan\left(\sqrt{2}\right) + \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = n\pi$$

för något heltal n. Vi uppskattar storleken på ingående arcusfunktioner:

$$\frac{\pi}{4} < \arctan\left(\sqrt{2}\right) < \frac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad 0 < \arccos\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

Här har vi använt att arctan är strängt växande, arccos är strängt avtagande, samt kända standardvinklar. Alltså är

$$\frac{\pi}{2} < 2\arctan\left(\sqrt{2}\right) + \arccos\left(\frac{1}{3}\right) < \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Det följer nu att $n = 1$ är nödvändigt.

Svar: π.

7. Eftersom $\sin(2kx) = \operatorname{Im}(e^{i2kx})$ så gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} \sin 2kx = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}\left(e^{i2kx}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{i2kx}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i2x} \cdot \frac{e^{i2nx} - 1}{e^{i2x} - 1}\right),$$

där vi utnyttjat att summan blir geometrisk med n termer, kvoten e^{i2x} samt första termen e^{i2x}. Den sista likheten gäller under förutsättning att $e^{i2x} \neq 1$, det vill säga när $x \neq m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$. Vi kan nu skriva

$$\begin{aligned} e^{i2x} \cdot \frac{e^{i2nx} - 1}{e^{i2x} - 1} &= e^{i2x} \cdot \frac{e^{inx}}{e^{ix}} \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{e^{ix} - e^{-ix}} = e^{i(n+1)x} \cdot \frac{2i \sin nx}{2i \sin x} \\ &= (\cos(n+1)x + i \sin(n+1)x) \cdot \frac{\sin nx}{\sin x}. \end{aligned}$$

Den eftersökta imaginärdelen ges således av

$$\frac{\sin(n+1)x \sin nx}{\sin x},$$

vilket var vad vi ville visa.

Svar: Se ovan.