Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2017–10–20 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel är tillåtna (penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva *får* användas).

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter duggans slut. Resultat meddelas i e-brev.

1. (a) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=3}^{50} \frac{2^k}{3^{k+1}}$. (1 p)

   (b) Lös ekvationen $\displaystyle\binom{n}{n-2} = 36$. (1 p)

   (c) För vilka $z \in \mathbf{C}$ gäller det att $(4+i)\bar{z} - 2iz = 4 - 2i$? (1 p)

2. (a) Lös ekvationen $\ln(x+3) + \ln(2-x) = \ln(2-4x)$. (2 p)

   (b) Förenkla uttrycket $\displaystyle\frac{e^{3\ln 3} - e^{-\ln 3}}{\ln\left(4\left(e^{-\ln 2}\right)^2\right) + \left(\ln\left(e^{-3}\right)\right)^3}$. (1 p)

3. (a) Finn alla lösningar till ekvationen $\cos 3x + \cos 5x = 0$. (1 p)

   (b) Beräkna $\tan\left(\arcsin \dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)$. (1 p)

   (c) Bestäm $\sin 2v$ om $\pi < v < 2\pi$ och $\cos v = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (1 p)

4. (a) Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för f^{-1} om $f(x) = \dfrac{1}{1+\ln(7-3x)}$. (2 p)

   (b) Bestäm (om möjligt) ett uttryck för g^{-1} om $g(x) = x^4 - 2x^2 + 7$. (1 p)

5. Skriv $\sin 2x \sin 3x \sin 5x$ som en summa av cos- och/eller sin-termer.

   Lös också ekvationen $4 \sin 2x \sin 3x \sin 5x = \sin 4x$.

6. Finn alla komplexa lösningar till ekvationen $(z+2i)^5 = \dfrac{4i-4}{1-i\sqrt{3}}$.

7. Rita grafen till $f(x) = \begin{cases} 2 - 4k - \cos x & \text{om} \quad (2k-1)\pi \le x < 2k\pi \\ -4k + \cos x & \text{om} \quad 2k\pi \le x < (2k+1)\pi \end{cases}$, där $k \in \mathbf{Z}$.

   Har f en invers? Bestäm i så fall ett uttryck för f^{-1}.

Lösningsförslag TATM79 2017-10-20

1. (a) Summan är geometrisk med kvoten $q = 2/3$ och 48 termer. Alltså,

$$\sum_{k=3}^{50} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \sum_{k=3}^{50} \frac{1}{3} \cdot \frac{2^3}{3^k} = \frac{2^3}{3^4} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{48}}{1-\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{48}\right).$$

(b) Från definitionen av binomialkoefficienter ser vi att

$$\begin{aligned} 36 = \binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad n^2 - n - 72 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (n-1/2)^2 = \frac{289}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad n = \frac{1 \pm 17}{2}, \end{aligned}$$

där endast $n = 9$ är en lösning ty $\binom{n}{n-2}$ är bara definierat för $n = 2, 3, 4, \ldots$

(c) Låt $z = a + bi$ där $a, b \in \mathbf{R}$. Då måste

$$\begin{aligned} (4+i)\overline{(a+bi)} - 2i(a+bi) = 4 - 2i \quad &\Leftrightarrow \quad 4a - 4bi + ai + b - 2ai + 2b = 4 - 2i \\ &\Leftrightarrow \quad 4a + 3b - (a+4b)i = 4 - 2i. \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a + 3b = 4 \\ a + 4b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 10/13 \\ b = 4/13. \end{cases} \end{aligned}$$

Alltså ges den enda lösningen av $z = \dfrac{10+4i}{13}$.

Svar: (a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{48}\right)$ (b) 9 (c) $z = \dfrac{10+4i}{13}$.

2. (a) För att alla logaritmer ska vara definierade krävs att $-3 < x < \dfrac{1}{2}$. Antag att x uppfyller detta villkor. Då gäller (eftersom ln är injektiv) att

$$\begin{aligned} \ln(x+3) + \ln(2-x) = \ln(2-4x) \quad &\Leftrightarrow \quad \ln((x+3)(2-x)) = \ln(2-4x) \\ &\Leftrightarrow \quad (x+3)(2-x) = 2 - 4x \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

där $x = 4$ inte uppfyller att $x < \dfrac{1}{2}$ men $x = -1$ uppfyller $-3 < x < \dfrac{1}{2}$.

(b) Logaritmlagar och det faktum att exp och ln är varandras inverser visar att

$$\begin{aligned} \frac{e^{3\ln 3} - e^{-\ln 3}}{\ln\left(4\left(e^{-\ln 2}\right)^2\right) + \left(\ln e^{-3}\right)^3} &= \frac{e^{\ln 3^3} - e^{\ln \frac{1}{3}}}{\ln\left(4\left(e^{\ln\frac{1}{2}}\right)^2\right) + (-3)^3} = \frac{3^3 - \frac{1}{3}}{\ln(1) + (-3)^3} \\ &= \frac{3^3 - \frac{1}{3}}{(-3)^3} = -1 + \frac{1}{3^4} = -\frac{80}{81}. \end{aligned}$$

Svar: (a) $x = -1$ (b) $-\dfrac{80}{81}$.

3. (a) Då $-\cos t = \cos(\pi - t)$ $(= \cos(t-\pi) = \cos(t+\pi))$ följer det att

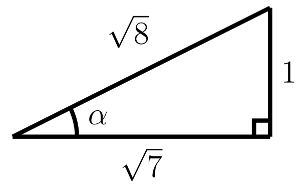
$$\begin{aligned} \cos 3x + \cos 5x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos 3x = \cos(\pi - 5x) \\ &\Leftrightarrow \quad \pm 3x = \pi - 5x + 2\pi n, \; n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Lösningarna ges alltså av

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \; n \in \mathbf{Z}, \quad \text{eller} \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$$

(b) Vi ser att $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{8}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Eftersom $0 < \alpha < \pi/2$ kan vi direkt rita upp en rätvinklig hjälptriangel där $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}$. Ifrån denna triangel kan vi se att $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$.



(c) Eftersom $\cos v = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ och $\pi < v < 2\pi$, så måste (trigonometriska ettan)

$$\sin v = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Därför blir

$$\sin 2v = 2\sin v \cos v = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Svar: (a) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, (b) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

4. (a) Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. För att logaritmen ska vara definierad måste vi kräva att $7 - 3x > 0$, så $x < \frac{7}{3}$. Vidare får nämnaren inte bli noll, vilket skulle ske då

$$1 + \ln(7-3x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(7-3x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 7 - 3x = e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}\left(7 - e^{-1}\right).$$

Definitionsmängden D_f ges således av $x < \frac{7}{3}$ och $x \neq \frac{1}{3}\left(7 - e^{-1}\right)$. För $x \in D_f$ gäller att

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{1 + \ln(7-3x)} \;&\Leftrightarrow\; \frac{1}{y} = 1 + \ln(7-3x) \;\Leftrightarrow\; 7 - 3x = \exp\left(\frac{1}{y} - 1\right) \\ &\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{3}\left(7 - \exp\left(\frac{1}{y} - 1\right)\right) \end{aligned}$$

Vi finner högst en lösning för varje y, vilket innebär att $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}\left(7 - \exp\left(\frac{1}{y} - 1\right)\right)$.

(b) Då $\pm 1 \in D_g = \mathbf{R}$ och $g(-1) = g(1) = 6$ kan g inte vara injektiv och därmed saknas invers.

Svar: (a) $x < \frac{7}{3}$, $x \neq \frac{1}{3}(7 - e^{-1})$; $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}\left(7 - \exp\left(\frac{1}{y} - 1\right)\right)$ (b) invers saknas.

5. Vi använder Eulers formler för att skriva om vänsterledet enligt

$$
\begin{aligned}
\sin 2x \sin 3x \sin 5x &= \left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i5x}-e^{-i5x}}{2i}\right) \\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{i5x}-e^{-ix}-e^{ix}+e^{-i5x}\right)\left(e^{i5x}-e^{-i5x}\right) \\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{i10x}-1-e^{i4x}+e^{-i6x}-e^{i6x}+e^{-i4x}+1-e^{-i10x}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sin 4x+\sin 6x-\sin 10x\right).
\end{aligned}
$$

Ekvationen vi vill lösa kan då skrivas som

$$
\sin 4x + \sin 6x - \sin 10x = \sin 4x \;\Leftrightarrow\; \sin 10x = \sin 6x
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} 10x = 6x + 2\pi n \\ \quad \text{eller} \\ 10x = \pi - 6x + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi n}{2} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi n}{8}, \end{cases}
$$

där n är ett godtyckligt heltal.

Svar: $\frac{1}{4}(\sin 4x + \sin 6x - \sin 10x)$; $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. Det komplexa talet $4i - 4$ ligger i andra kvadranten och kan skrivas

$$
4i - 4 = \sqrt{32}e^{i3\pi/4} = 4\sqrt{2}e^{i3\pi/4}.
$$

På samma sätt,

$$
1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}.
$$

Detta medför att

$$
\frac{4i-4}{1-i\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\pi(3/4+1/3)} = 2\sqrt{2}e^{i13\pi/12}.
$$

Låt nu $z + 2i = w$ och $w = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

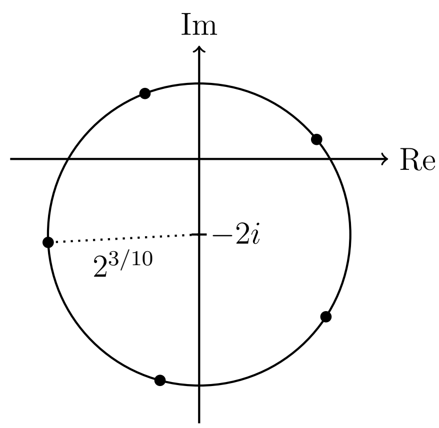
$$
w^5 = r^5 e^{i5\theta} = 2\sqrt{2}\, e^{i13\pi/12} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^5 = 2\sqrt{2}, \; r \geq 0, \\ 5\theta = 13\pi/12 + 2\pi n, \; n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{1}
$$

Detta visar att $r = (2\sqrt{2})^{1/5} = 2^{3/10}$ och $\varphi = \frac{13\pi}{60} + \frac{2n\pi}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Eftersom $z = -2i + w$ blir nu våra lösningar

$$
z = -2i + 2^{3/10}\, e^{i\left(\frac{13\pi}{60}+\frac{2n\pi}{5}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.
$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 5$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.

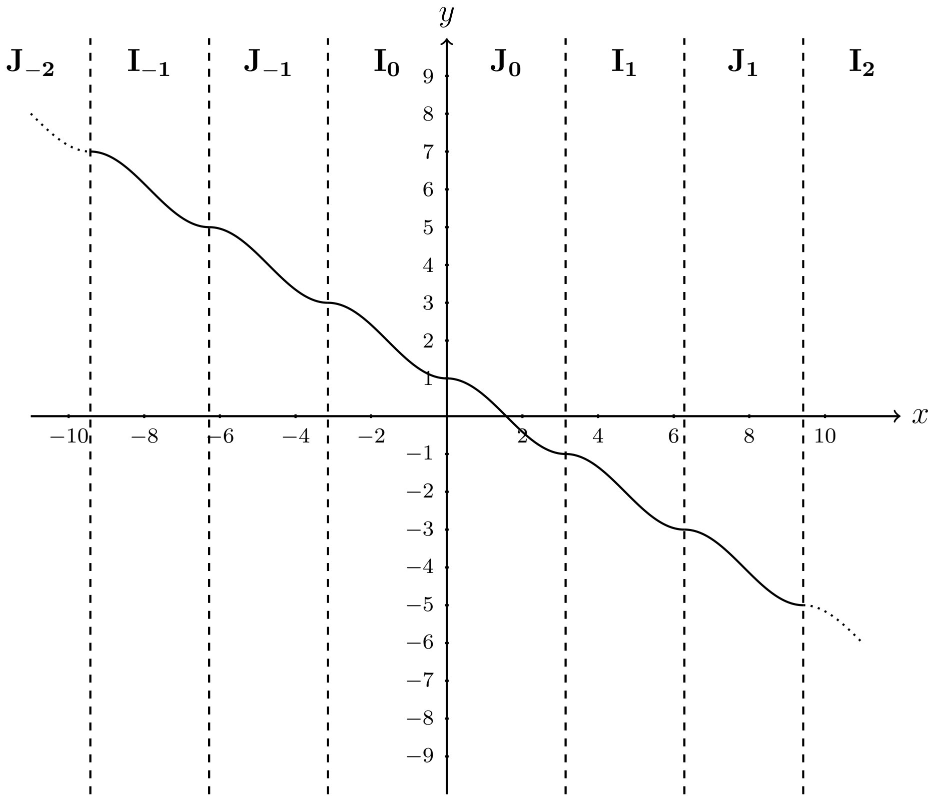


Svar: $z = -2i + 2^{3/10}\, e^{i\left(\frac{13\pi}{60}+\frac{2n\pi}{5}\right)}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

7. Vi börjar med att skissa hur funktionen ser ut. Om $k = 0$ och $0 \leq x < \pi$ är $f(x) = \cos x$. Om $k = 0$ och $-\pi \leq x < 0$ är $f(x) = 2 - \cos x$. Vi ser att uttrycken "hakar i" varandra när $x = 0$ eftersom $\cos 0 = 2 - \cos 0$. Samma beteende upprepas när $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, med skillnaden att funktionen har skiftats $4k$ enheter i vertikal led.

   Vi definierar intervallen I_k och J_k, $k \in \mathbf{Z}$, enligt

$$I_k = [(2k-1)\pi,\, 2k\pi[\quad \text{och} \quad J_k = [2k\pi,\, (2k+1)\pi[.$$



   Vi ser i figuren att även om funktionen inte är periodisk, så finns det en form av periodisk symmetri. Mycket riktigt är $f(x + 2\pi) = f(x) - 4$ för alla $x \in \mathbf{R}$. Vidare vet vi att om $-\pi \leq x < 0$ så gäller att

$$f(x + \pi) = \cos(x + \pi) = -\cos x = 2 - \cos x - 2 = f(x) - 2,$$

   vilket visar att $f(x+\pi) = f(x) - 2$ för alla $x \in \mathbf{R}$. Det räcker alltså i princip att betrakta till exempel intervallet J_0 där $0 \leq x < \pi$. För $x \in J_0$ är f strängt avtagande, så f måste vara strängt avtagande på hela $\mathbf{R}$. Således är f injektiv och har en invers f^{-1}. Låt $y = f(x)$ så att $x = f^{-1}(y)$. Då är

$$f(x + \pi) = f(x) - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x + \pi = f^{-1}(f(x) - 2) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) + \pi = f^{-1}(y - 2).$$

   För $x \in J_0$ gäller sedan att

$$y = f(x) = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = \arccos(y), \quad -1 < y \leq 1.$$

   Alltså kommer

$$f^{-1}(y - 2k) = \arccos(y - 2k), \quad 2k - 1 < y \leq 2k + 1.$$

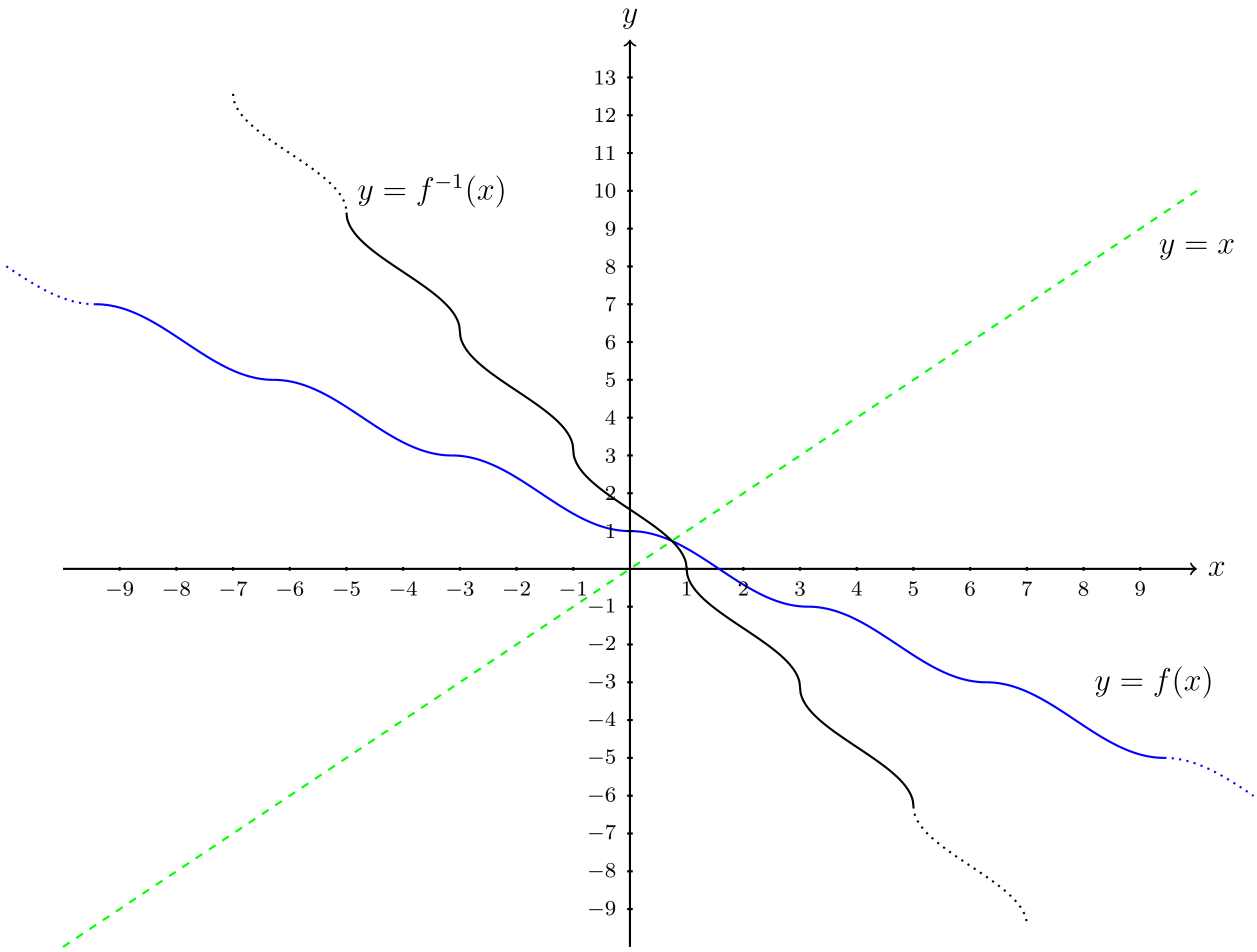
Men då vi vet att $f^{-1}(y-2k) = f^{-1}(y) + k\pi$, så måste

$$f^{-1}(y) = \arccos(y-2k) - k\pi, \quad 2k-1 < y \leq 2k+1.$$

Inversen kan alltså skrivas

$$f^{-1}(y) = \arccos(y-2k) - k\pi, \quad 2k-1 < y \leq 2k+1,\ k \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Hur ser då inversen ut? Som bekant (eller hur?) ges grafen av speglingen av $y = f(x)$ i linjen $y = x$, vilket stämmer överens med det uttryck vi fått fram ovan.



Svar: Figuren och uttryck för inversen finns ovan.

Alternativ II. Det går även att direkt angripa varje intervall I_k och J_k för att hitta ett uttryck för inversen, men det blir lite mer otympligt. Låt $k \in \mathbf{Z}$. Vi undersöker varje delintervall som $f(x)$ är definierad på. Vi börjar med att undersöka $f(x)$ när $x \in I_k$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = 2-4k-\cos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 2-4k-y \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pm\arccos(2-4k-y) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \end{aligned}$$

eftersom $y \in]1-4k, 3-4k]$ så $2-4k-y \in [-1,1]$. Vi söker $x \in I_k$, så den enda lösningen som uppfyller kraven är

$$x = -\arccos(2-4k-y) + 2\pi k, \quad 1-4k < y \leq 3-4k, \tag{3}$$

där vi valt minuslösningen samt $n = k$. Alltså är $f^{-1}(y) = 2\pi k - \arccos(2 - 4k - y)$ för $y \in]1 - 4k, 3 - 4k]$. Det är också klart att $f(x)$ är strängt avtagande på intervallet eftersom cos är strängt växande på detta intervall.

Om $x \in J_k$, dvs $2k\pi \leq x < (2k+1)\pi$, så gäller att

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = -4k + \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 4k + y \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pm \arccos(4k + y) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \end{aligned}$$

eftersom $y \in] - 1 - 4k, 1 - 4k]$ så $4k + y \in [-1, 1]$. Vi behöver ha $x \in J_k$, så

$$x = \arccos(4k + y) + 2\pi k, \quad -1 - 4k < y \leq 1 - 4k, \tag{4}$$

där vi valt den positiva lösningen samt $n = k$, eftersom detta är den enda möjligheten. Alltså är $f^{-1}(y) = 2\pi k + \arccos(4k + y)$ för $y \in] - 1 - 4k, 1 - 4k]$. Även här är f strängt avtagande.

Vi ser att funktionen hänger ihop i skarvarna och att minpunkten i föregående intervall I_k blir maxpunkten i nästa intervall J_k. Funktionen är alltså inverterbar på hela $\mathbf{R}$. För att uttrycka definitionsmängden för f^{-1} i "växande" ordning (som vi normalt gör) ersätter vi "$-k$" med "k" i (3) och (4) ovan och erhåller då att

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -2\pi k + \arccos(y - 4k), & -1 + 4k < y \leq 1 + 4k, \\ -2\pi k - \arccos(2 + 4k - y), & 1 + 4k < y \leq 3 + 4k, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{5}$$

Övning: visa att (5) och (2) representerar samma funktion.