Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2017–09–25 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel är tillåtna (penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva *får* användas).

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter duggans slut. Resultat meddelas i e-brev.

1. (a) Lös ekvationen $3 + \sqrt{3x^2 - 9x + 7} = x$. (2 p)

   (b) Låt $p(x) = x^3 - 2x^2 + 7$ och $q(x) = x^2 + 1$.

   Bestäm kvoten och resten vid divisionen $\dfrac{p(x)}{q(x)}$.

   Ange också ett samband mellan $p(x)$, $q(x)$ samt denna kvot och rest. (1 p)

2. (a) Finn alla lösningar till ekvationen $\ln\left(\dfrac{5}{2} - x\right) - 2\ln(x+1) = \ln\dfrac{9}{2}$. (2 p)

   (b) Vilka x uppfyller sambandet $x^{\ln x} = \sqrt{e}$? (1 p)

3. (a) För vilka x är $\cos 2x - 3\cos x = 1$? (2 p)

   (b) Skriv $e^{i \arccos \frac{1}{4}}$ på formen $a + ib$ med $a, b \in \mathbf{R}$. (1 p)

4. Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för f^{-1} om $f(x) = \sqrt{\dfrac{4}{1-2x} - 1}$.

5. Lös ekvationen $2^3 \cdot 27^{-x} + 3^{-x} + 6 = 2 \cdot 9^{1-x}$.

6. (a) Visa att $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ för alla reella x och y.

   Räknelagar för ln får användas utan att du först bevisar dem. (1 p)

   (b) Skriv $f(x) = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$, $-\pi \le x \le \pi$ utan arcusfunktioner. (2 p)

7. Bestäm alla $a > 1$ sådana att avståndet mellan 2 olika komplexa lösningar till ekvationen $z^{12} + (1-a)z^6 = a$ alltid är minst 1.

Lösningsförslag TATM79 2017-09-25

1. (a) Låt oss stuva om i ekvationen för att sedan kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$
\begin{aligned}
3+\sqrt{3x^2-9x+7}=x \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{3x^2-9x+7}=x-3 && (*)\\
&\Rightarrow \quad 3x^2-9x+7=(x-3)^2=x^2-6x+9\\
&\Leftrightarrow \quad 2x^2-3x-2=2\,(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad x=2 \quad \text{eller} \quad x=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. För att $(*)$ ska ha en lösning måste högerledet vara icke-negativt, dvs $x \geq 3$. Ingen av våra kandidater uppfyller detta, så ekvationen saknar lösning (implikationen är faktiskt en ekvivalens om villkoret $x \geq 3$ läggs till).

Självfallet går det även att direkt testa vänster- och högerled för våra alternativ.

(b) Vi utför en polynomdivision:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
 & x & - & 2 & & & & \\
\hline
 & x^3 & - & 2x^2 & & + & 7 & x^2+1 \\
\hline
- & (x^3 & & & + \ x) & & & \\
\hline
 & & - & 2x^2 & - \ x & + & 7 & \\
 & - & (- & 2x^2 & & - & 2) & \\
\hline
 & & & & - \ x & + & 9 &
\end{array}
$$

Detta ger att $x^3-2x^2+7=(x-2)(x^2+1)+9-x$, så kvoten blir $x-2$ och resten $9-x$. Med andra ord,

$$\frac{p(x)}{q(x)}=x-2+\frac{9-x}{x^2+1}.$$

Svar: (a) Inga lösningar (b) $p(x)=(x-2)q(x)+9-x$.

2. (a) För att alla logaritmer i ekvationen ska vara definierade krävs att $x<\frac{5}{2}$ och $x>-1$. Antag att x uppfyller dessa villkor. Då gäller (eftersom ln är injektiv) att

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{5}{2}-x\right)-2\ln(x+1)=\ln\frac{9}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{5}{2}-x\right)=\ln\left(\frac{9}{2}(x+1)^2\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{5}{2}-x=\frac{9}{2}(x^2+2x+1)\\
&\Leftrightarrow \quad 9x^2+20x+4=0\\
&\Leftrightarrow \quad x=-\frac{10}{9}\pm\frac{8}{9},
\end{aligned}
$$

där $x=-\frac{18}{9}=-2$ inte uppfyller att $x>-1$ men $x=-\frac{2}{9}$ uppfyller båda villkoren.

(b) För att lösning ska existera måste $x > 0$ så att $\ln x$ är definierad. Vi logaritmerar båda leden (både vänster- och högerled är positiva för alla $x > 0$):

$$x^{\ln x} = \sqrt{e} \quad \Leftrightarrow \quad (\ln x)^2 = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Båda alternativen löser ekvationen (vi har ekvivalenser hela vägen).

Svar: (a) $x = -\dfrac{2}{9}$ (b) $x = \exp\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3. (a) Eftersom $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ följer det att

$$\cos 2x - 3\cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \cos^2 x - \frac{3}{2}\cos x - 1 = \left(\cos x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}.$$

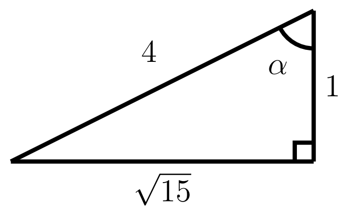
Ekvationen $\cos x = 2$ saknar lösningar, men

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

där $n \in \mathbf{Z}$.

(b) Vi ser att $\alpha = \arccos\dfrac{1}{4} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Eftersom $0 < \alpha < \pi/2$ kan vi direkt rita upp en rätvinklig hjälptriangel där $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$. Ifrån denna triangel ser vi att $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.



Således erhåller vi att

$$e^{i\arccos\frac{1}{4}} = \cos\left(\arccos\frac{1}{4}\right) + i\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Svar: (a) $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, (b) $e^{i\arccos\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

4. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. För att kvadratroten ska vara definierad måste vi kräva att

$$\frac{4}{1-2x} - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3+2x}{1-2x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2} \leq x < \frac{1}{2}.$$

Detta kan ses med hjälp av tex en teckentabell:

		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$3+2x$	$-$	0	$+$		$+$
$1-2x$	$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{3+2x}{1-2x}$	$-$	0	$+$	☠	$-$

Definitionsmängden blir således $D_f = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right[$. För $x \in D_f$ gäller att

$$y = \sqrt{\frac{4}{1-2x} - 1} \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{4}{1-2x} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + y^2 = \frac{4}{1-2x}$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 - 2x = \frac{4}{1+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{1+y^2}\right) = \frac{y^2-3}{2(1+y^2)}.$$

Vi finner högst en lösning för varje y, vilket innebär att $f^{-1}(y) = \frac{y^2-3}{2(1+y^2)}$.

Svar: $D_f = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right[$ och $f^{-1}(y) = \frac{y^2-3}{2(1+y^2)}$.

5. Vi ser att med substitutionen $t = 3^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$, så övergår ekvationen till

$$2^3 \cdot t^3 + t + 6 = 2 \cdot 9 \cdot t^2 \quad \Leftrightarrow \quad 8t^3 - 18t^2 + t + 6 = 0.$$

Vi gissar rötter och finner att $t = 2$ är en lösning. Polynomdivision med $t - 2$ visar att

$$8t^3 - 18t^2 + t + 6 = (t-2)(8t^2 - 2t - 3).$$

Rötterna till andragradsfaktorn ges av

$$0 = 8t^2 - 2t - 3 = 8\left(\left(t - \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{25}{64}\right) = 8\left(t - \frac{3}{4}\right)\left(t + \frac{1}{2}\right).$$

Eftersom $t = 3^{-x} > 0$ så saknas lösningar till $t = -\frac{1}{2}$. Övriga rötter renderar lösningarna

$$t = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{-x} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\ln\frac{3}{4}}{\ln 3} = 2\frac{\ln 2}{\ln 3} - 1$$

samt

$$t = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{-x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Svar: $x = 2\frac{\ln 2}{\ln 3} - 1$ eller $x = -\frac{\ln 2}{\ln 3}$.

6. (a) Eftersom $e^t > 0$ för alla $t \in \mathbf{R}$ så gäller enligt kända logaritmlagar att

$$e^x \cdot e^y = \exp\left(\ln\left(e^x \cdot e^y\right)\right) = \exp\left(\ln e^x + \ln e^y\right) = \exp(x+y) = e^{x+y},$$

där vi utnyttjat att ln och exp är varandras inverser.

(b) Enligt definitionerna gäller att

$$y = \arccos(\cos x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos y = \cos x, \\ y \in [0, \pi], \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \pm x + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}, \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$

och

$$y = \arcsin(\sin x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin y = \sin x, \\ y \in [-\pi/2, \pi/2], \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}, \text{ eller } y = \pi - x + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}, \\ y \in [-\pi/2, \pi/2]. \end{cases}$$

Således blir

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x \le 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

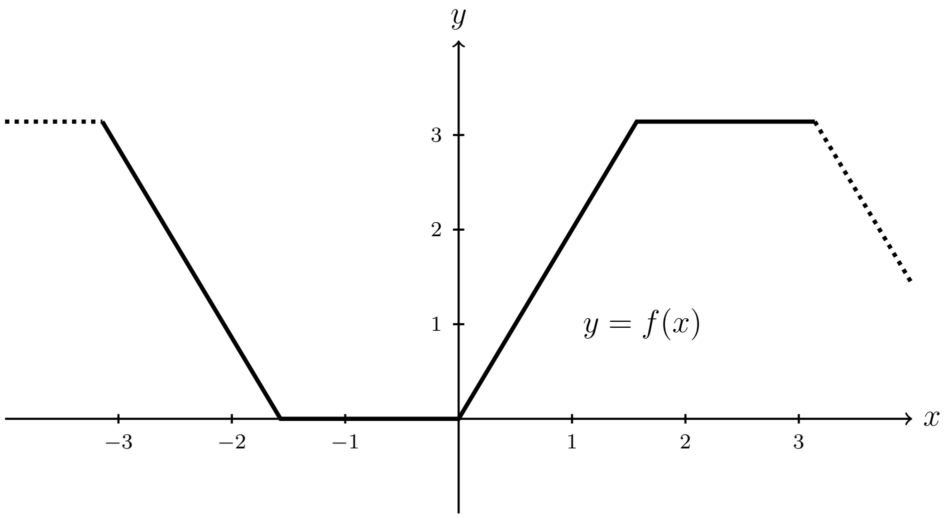
samt

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

Vi erhåller alltså att

$$\arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x) = \begin{cases} -(\pi + 2x), & -\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le 0, \\ 2x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

Det kan även vara intressant att notera att funktion $f(x) = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$ är periodisk med perioden 2π samt att grafen ser ut enligt nedan.



Svar: (a) se ovan (b) se ovan.

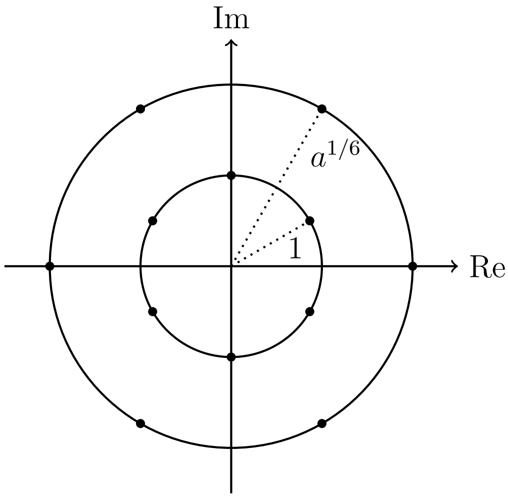
7. Ekvationen kan formuleras om enligt

$$0 = z^{12} + (1-a)z^6 - a = z^6(z^6+1) - a(z^6+1) = \left(z^6+1\right)\left(z^6 - a\right).$$

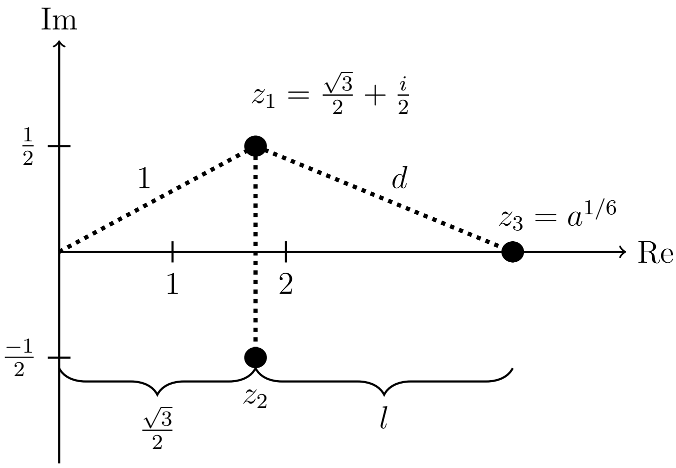
Lösningarna till $z^6 + 1 = 0$ fås genom att skriva $z = re^{i\theta}$, $r \ge 0$, $\theta \in \mathbf{R}$:

$$z^6 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad r^6 e^{i6\theta} = e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^6 = 1, \ r \ge 0, \\ 6\theta = \pi + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

så $z = \exp\left(i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}\right)\right)$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, räknar upp lösningarna till ekvationen $z^6 = -1$. På motsvarande sätt finner vi lösningarna till $z^6 = a$ enligt uttrycket $z = a^{1/6}\exp\left(i\frac{\pi n}{3}\right)$ med $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Samtliga lösningar ligger alltså på två koncentriska cirklar, en med radie 1 och en med radie $a^{1/6}$.



Av symmetriskäl räcker det att betrakta avstånden mellan de tre lösningar som ligger närmast positiva realaxeln.



Vi ser direkt att $|z_1 - z_2| = 1$, så lösningar på den inre cirkeln ligger minst på avståndet ett från varandra. Eftersom $a > 1$ kommer motsvarande att gälla för lösningar på den yttre cirkeln. Vad gäller då avståndet mellan två lösningar på olika cirklar? Kravet är att $d \geq 1$, vilket innebär att $l \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Då följer det att

$$a^{1/6} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 3^{6/2} = 27.$$

Vi kan även visa detta direkt genom att undersöka avståndet mellan z_1 och z_3:

$$|z_1 - z_3| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - a^{1/6}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2},$$

så om det avståndet ska vara minst ett måste

$$\begin{aligned} 1 \leq |z_1 - z_3| \quad &\Leftrightarrow \quad 1 \leq |z_1 - z_3|^2 = \frac{3}{4} - \sqrt{3}a^{1/6} + a^{1/3} + \frac{1}{4} = 1 - \sqrt{3}a^{1/6} + a^{1/3} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}a^{1/6} \leq a^{1/3} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} \leq a^{1/6} \quad \Leftrightarrow \quad 27 \leq a. \end{aligned}$$

Svar: $a \geq 27$.