Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2016–10–22 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel är tillåtna (penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva *får* användas).

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter duggans slut. Resultat meddelas i e-brev.

1. (a) Lös olikheten $x \cdot \dfrac{x+2}{2-3x} > 8x+3$. (2 p)

   (b) Skriv $\displaystyle\sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} 3^{42-k} 2^k$ på enklast möjliga form. (1 p)

2. (a) Finn alla lösningar till ekvationen $\sqrt{3}\tan x = -1$. (1 p)

   (b) Beräkna $\tan\alpha$ och $\sin\beta$ om $\alpha = \arcsin\dfrac{1}{4}$ och $\beta = 2\arctan\dfrac{5}{12}$. (2 p)

3. (a) Vilka x uppfyller sambandet $\ln 4x^2 = 2\ln(x+5) + \ln x^2$? (1 p)

   (b) Lös ekvationen $49^x - 7^{x+1} + 12 = 0$. (1 p)

   (c) Visa att $2^x \cdot 3^x = 6^x$ för alla reella x.
   Räknelagar för ln och exp får användas utan att du först bevisar dem. (1 p)

4. Skriv $\sin 3x \cos^2 4x$ som en summa av cos- och/eller sin-termer.
   Lös också ekvationen $4\sin 3x\cos^2 4x = 3\sin 3x - \sin 5x$.

5. (a) Skriv $w = \left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{15}$ på formen $w = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$. (1 p)

   (b) Finn alla komplexa lösningar till ekvationen $z^3 = 1 + 2i$. (2 p)

6. Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för f^{-1} om $f(x) = \ln\left(2\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1+x}\right)$.

7. Beräkna $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \arcsin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi k}{2n}\right)$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Lösningsförslag TATM79 2016-10-22

1. (a) Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$x \cdot \frac{x+2}{2-3x} > 8x+3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+2x-(8x+3)(2-3x)}{2-3x} = \frac{25x^2-5x-6}{2-3x} > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-3/5)(x+2/5)}{2-3x} > 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		$-2/5$		$3/5$		$2/3$	
$x+2/5$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-3/5$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2-3x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{(x-3/5)(x+2/5)}{2-3x}$	$+$	0	$-$	0	$+$	☠	$-$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är positivt precis då $x < -2/5$ eller $3/5 < x < 2/3$.

(b) Direkt från binomialsatsen erhåller vi att

$$\sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} 3^{42-k} 2^k = (3+2)^{42} = 5^{42}.$$

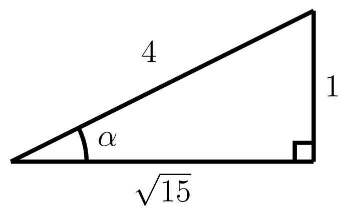
Svar: (a) $x < -2/5$ eller $3/5 < x < 2/3$ (b) 5^{42}.

2. (a) Tangens är periodisk med perioden π och $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, så

$$\sqrt{3}\tan x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

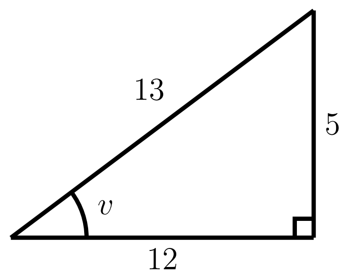
(b) Vi ser att $\alpha = \arcsin \frac{1}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Eftersom $0 < \alpha < \pi/2$ kan vi direkt rita upp en rätvinklig hjälptriangel där $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Ifrån denna triangel ser vi att $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$.



För att beräkna $\sin\beta$, låt $v = \arctan \frac{5}{12} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
En rätvinklig hjälptriangel där $\tan v = \frac{5}{12}$ visar att $\sin v = \frac{5}{13}$ samt $\cos v = \frac{12}{13}$. Vi utnyttjar sinus för dubbla vinkeln och erhåller att

$$\sin 2v = 2\sin v \cos v = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}.$$



Svar: (a) $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, (b) $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$, (c) $\sin\beta = \frac{120}{169}$.

3. (a) För att alla logaritmer i ekvationen ska vara definierade krävs att $x \neq 0$ samt $x > -5$. Antag att x uppfyller dessa villkor. Då gäller (eftersom ln är injektiv) att

$$\begin{aligned} \ln 4x^2 = 2\ln(x+5) + \ln x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln 4 + \ln x^2 = \ln(x+5)^2 + \ln x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 4 = (x+5)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -5 \pm 2, \end{aligned}$$

där $x = -7$ inte uppfyller villkoret men $x = -3$ gör det.

(b) Vi ser att uttrycket är en andragradare i 7^x och faktoriserar därför:

$$\begin{aligned} 49^x - 7^{x+1} + 12 &= (7^x)^2 - 7 \cdot 7^x + 12 \\ &= \left(7^x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{48}{4} \\ &= \left(7^x - \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(7^x - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= (7^x - 4)(7^x - 3). \end{aligned}$$

Således ges lösningarna till ekvationen av

$$7^x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln 4}{\ln 7} \qquad \text{och} \qquad 7^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln 3}{\ln 7}.$$

(c) Eftersom

$$\ln\left(2^x \cdot 3^x\right) = \ln 2^x + \ln 3^x = x\ln 2 + x\ln 3 = x\left(\ln 2 + \ln 3\right) = x\ln 6 = \ln 6^x$$

och ln är injektiv så följer det att $2^x \cdot 3^x = 6^x$.

Svar: (a) $x = -3$ (b) $x = \frac{\ln 4}{\ln 7}$ eller $x = \frac{\ln 3}{\ln 7}$ (c) se ovan.

4. Enligt känd formel för $\cos^2 t$ och Eulers formler kan vi skriva

$$\begin{aligned} \sin 3x \cos^2 4x = \sin 3x \left(\frac{1+\cos 8x}{2}\right) &= \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin 3x \cos 8x \\ &= \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{8i}\left(e^{i3x} - e^{-i3x}\right)\left(e^{i8x} + e^{-i8x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{8i}\left(e^{i11x} - e^{-i11x} - \left(e^{i5x} - e^{-i5x}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{4}\left(\sin 11x - \sin 5x\right). \end{aligned}$$

Ekvationen vi vill lösa kan därför skrivas

$$4\sin 3x \cos^2 4x = 3\sin 3x - \sin 5x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 11x = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 11x = 3x + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z} \\ \quad \text{eller} \\ 11x = \pi - 3x + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\pi n}{4}, \ n \in \mathbf{Z} \\ \text{eller} \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Svar: $\sin 3x \cos^2 4x = \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{4}\left(\sin 11x - \sin 5x\right)$; $x = \frac{\pi n}{4}$ eller $x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. (a) Det komplexa talet $\sqrt{3}+i$ ligger i första kvadranten och kan skrivas

$$\sqrt{3}+i = \sqrt{3+1}\, e^{i\pi/6} = 2e^{i\pi/6}.$$

På samma sätt,

$$1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}.$$

Detta medför att

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{15} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-i\pi/4-i\pi/6}\right)^{15} = 2^{-15/2}e^{-i75\pi/12} = 2^{-15/2}e^{-i6\pi-i\pi/4}$$

$$= 2^{-15/2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2^{-8}\,(1-i) = \frac{1-i}{256}.$$

(b) En binomisk ekvation löser vi genom att gå över till polära koordinater. Låt $z = re^{i\theta}$ för $r \geq 0$ och $\theta \in \mathbf{R}$. Vi söker alla lösningar till ekvationen

$$z^3 = r^3 e^{i3\theta} = 1+2i. \tag{1}$$

Det komplexa talet $1+2i$ ligger i första kvadranten och kan skrivas

$$1+2i = \sqrt{5}\, e^{i\arctan 2}.$$

För att (1) ska gälla måste högerledet och vänsterledet ha samma absolutbelopp och argumenten måste stämma överens upp till en heltalsmultipel av 2π. Således måste

$$r^3 = 5^{1/2} \quad \text{och} \quad 3\theta = \arctan 2 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Eftersom $r \geq 0$ måste $r = 5^{1/6}$ (enda möjligheten), och θ kan vi lösa ut ur den andra ekvationen som

$$\theta = \frac{\arctan 2}{3} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Lösningarna till (1) ges alltså av

$$z = 5^{1/6}e^{i(\arctan 2 + 2\pi n)/3}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Eftersom lösningarna ligger jämt fördelade på en cirkel och det finns precis 3 lösningar så räcker det med, tex, $n = 0, 1, 2$.

Svar: (a) $\dfrac{1-i}{256}$ (b) $z = 5^{1/6}e^{i(\arctan 2+2\pi n)/3}, \quad n = 0,1,2.$

6. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. Vi ser direkt att $-1 \leq x \leq 1$ är kravet för att både $\sqrt{x+1}$ och $\sqrt{1-x}$ ska vara definierade. Antag att detta är sant. Vidare måste även

$$2\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1+x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x} > \sqrt{1+x} \quad \Leftrightarrow \quad 1-x > 1+x \quad \Leftrightarrow \quad x < 0.$$

Här har vi utnyttjat att $-1 \leq x \leq 1$, $\sqrt{a} \geq 0$ för alla $a \geq 0$, samt att funktionen $x \mapsto x^2$ är strängt växande för icke-negativa x. Alltså blir $D_f = [-1, 0[$. Låt $x \in D_f$. Då gäller att

$$y = \ln\left(2\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1+x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^y}{2} = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$$

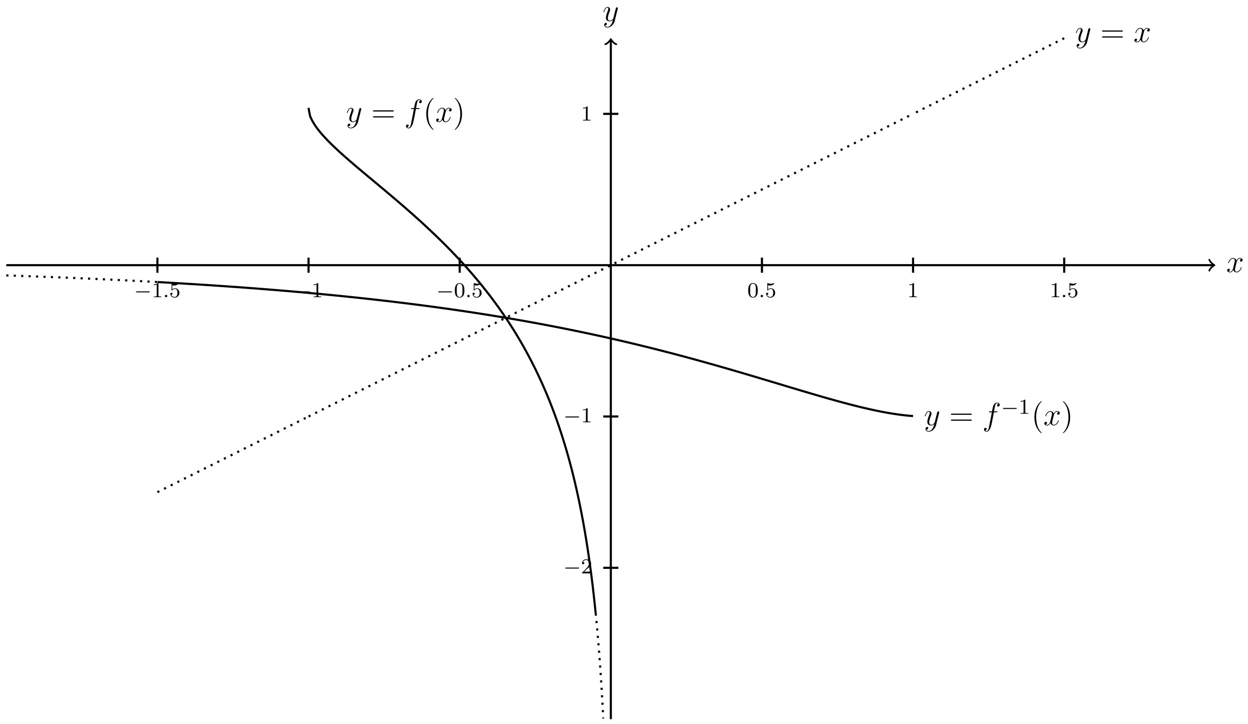
$$\Rightarrow \quad \frac{e^{2y}}{4} = 1 - x + 1 + x - 2\sqrt{1-x^2}$$

där vi kvadrerat ekvationen i sista steget. Vi sorterar om och kvadrerar igen:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{e^{2y}}{8} \quad &\Rightarrow \quad 1 - x^2 = 1 - \frac{e^{2y}}{4} + \frac{e^{4y}}{64} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{e^{2y}}{4} - \frac{e^{4y}}{64} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{e^y}{8}\sqrt{16 - e^{2y}}.\end{aligned}$$

Vi har alltså två alternativ till ett eventuellt uttryck för en invers. Nu vet vi i förväg att $x < 0$ (för att $x \in D_f$), så vi ser direkt att den positiva lösningen inte kan vara aktuell. Således finner vi högst en lösning för varje y så detta måste vara ett uttryck för $f^{-1}(y)$.

Svar: $D_f = [-1, 0[$ och $f^{-1}(y) = -\frac{e^y}{8}\sqrt{16 - e^{2y}}$.



7. Först ser vi till att allt är definierat för alla $n = 1, 2, \ldots$ Vi ser att

$$\frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{4} - \frac{\pi k}{2n} > \frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2n} = -\frac{\pi}{4}$$

för alla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ och då $\frac{\pi}{4} < 1$ så är $\arcsin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi k}{2n}\right)$ definierat för $k = 0, 1, \ldots, n$ eftersom $D_{\text{arcsin}} = [-1, 1]$. Låt nu

$$c_k = \binom{n}{k} \arcsin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi k}{2n}\right), \; k = 0, 1, \ldots, n.$$

Vi vill beräkna summan $S = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Vi ser att

$$c_{n-k} = \binom{n}{n-k} \arcsin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi(n-k)}{2n}\right) = \binom{n}{k} \arcsin\left(-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi k}{2n}\right)\right) = -c_k,$$

där vi utnyttjat att $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$ och att $\arcsin(-t) = -\arcsin t$ för alla t i intervallet $[-1, 1]$. Termerna i summan uppvisar alltså en symmetri $c_{n-k} + c_k = 0$, så

$$\left.\begin{aligned} S &= c_0 + c_1 + \cdots + c_n \\ S &= c_n + c_{n-1} + \cdots + c_0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2S &= (c_0 + c_n) + (c_1 + c_{n-1}) + \cdots + (c_n + c_0) \\ &= 0 + 0 + \cdots + 0 = 0 \end{aligned}$$

vilket innebär att $S = 0$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

Svar: Summan blir 0 för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.