Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2016–09–26 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel är tillåtna (penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva *får* användas).

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter duggans slut. Resultat meddelas i e-brev.

1. (a) Bestäm alla lösningar till ekvationen $2\sqrt{3} + \sqrt{x+2} = x\sqrt{3}$? (2 p)

   (b) Finn alla reella lösningar till ekvationen $\displaystyle\sum_{k=0}^{76} \binom{76}{k} 2^k x^{76-k} = 1$. (1 p)

2. (a) Lös ekvationen $\ln x^2 = \ln 2 + \ln(3+x) + \ln(4+x)$. (2 p)

   (b) Vilka x uppfyller sambandet $\dfrac{e^{x^2}}{2^{2x}} = e^{17}$? (1 p)

3. (a) Finn alla lösningar till ekvationen $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{5}\right)$. (1 p)

   (b) Lös ekvationen $2\sin x = \tan x$. (1 p)

   (c) Beräkna $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right)$. (1 p)

4. (a) Finn alla reella lösningar till ekvationen $\dfrac{3e^{3x} - e^{2x}}{3e^{x} - 1} = 4$. (2 p)

   (b) Visa att $\left(e^{ix}\right)^2 = e^{i2x}$ för alla $x \in \mathbf{R}$.
   Endast trigonometriska räknelagar får användas utan bevis. (1 p)

5. Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för f^{-1} om $f(x) = \dfrac{\pi + 4\arcsin x}{\pi - 4\arcsin x}$.

6. För vilket/vilka komplexa tal z gäller det att $z^7 = \left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{1 - i}\right)^5$?

7. Faktorisera $p(x) = 8x^3 - 6x - \sqrt{3}$ så långt som möjligt, t ex genom att först bevisa att $a = \cos\dfrac{\pi}{18}$ är ett nollställe till p.

Lösningsförslag TATM79 2016-09-26

1. (a) Vi isolerar $\sqrt{x+2}$ och kvadrerar ekvationen (observera att det då bara blir en implikation!):

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}+\sqrt{x+2}=x\sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+2}=\sqrt{3}(x-2) \\ &\Rightarrow \quad x+2=3(x-2)^2=3x^2-12x+12 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2-\frac{13}{3}x+\frac{10}{3}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x=\frac{13}{6}\pm\frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x=20/6=10/3$ ser vi att

$$\mathrm{VL}=2\sqrt{3}+\sqrt{16/3}=2\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{10\sqrt{3}}{3} \quad \text{och} \quad \mathrm{HL}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

så $x=10/3$ är en lösning. Om $x=6/6=1$ är

$$\mathrm{VL}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3} \quad \text{och} \quad \mathrm{HL}=1\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}.$$

I detta fall stämmer vänsterled och högerled inte överens, så $x=1$ är ingen lösning.

(b) Direkt från binomialsatsen erhåller vi att

$$\sum_{k=0}^{76}\binom{76}{k}2^k x^{76-k}=(2+x)^{76},$$

så

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{76}\binom{76}{k}2^k x^{76-k}=1 \quad &\Leftrightarrow \quad (2+x)^{76}=1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2+x=\pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x=-2\pm 1. \end{aligned}$$

Svar: (a) $x=\dfrac{10}{3}$ (b) -1 eller -3.

2. (a) För att alla logaritmer i ekvationen ska vara definierade krävs att $x\neq 0$, $x>-3$, samt $x>-4$. Totalt sett måste vi alltså kräva att $x>-3$ och $x\neq 0$. Antag att x uppfyller detta villkor. Då gäller (eftersom ln är injektiv) att

$$\begin{aligned} \ln(x^2)=\ln 2+\ln(3+x)+\ln(4+x) \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(x^2)=\ln(2(3+x)(4+x)) \\ &\Leftrightarrow \quad x^2=2(3+x)(4+x) \\ &\Leftrightarrow \quad x^2+14x+24=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x=-7\pm 5, \end{aligned}$$

där $x=-12$ inte uppfyller villkoret men $x=-2$ gör det.

(b) Vi logaritmerar båda leden (allt är positivt för alla $x\in\mathbf{R}$):

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2}}{2^{2x}}=e^{17} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2-2x\ln 2=17 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-\ln 2)^2=17+(\ln 2)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x=\ln 2\pm\sqrt{17+(\ln 2)^2}. \end{aligned}$$

Båda alternativen löser ekvationen (vi har ekvivalenser hela vägen).

Svar: (a) $x=-2$ (b) $x=\ln 2\pm\sqrt{17+(\ln 2)^2}$.

3. (a) Ur enhetscirkeln ser vi att

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}3x-\dfrac{\pi}{3}=2x+\dfrac{\pi}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\\ \qquad\text{eller}\\ 3x-\dfrac{\pi}{3}=-2x-\dfrac{\pi}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=\dfrac{8\pi}{15}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\\ \text{eller}\\ x=\dfrac{2\pi}{75}+\dfrac{2\pi n}{5},\ n\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

(b) Eftersom

$$2\sin x=\tan x\quad\Leftrightarrow\quad\sin x\left(2-\frac{1}{\cos x}\right)=0$$

så måste endera $\sin x=0$ eller $\cos x=\dfrac{1}{2}$. Vi löser dessa ekvationer:

$$\sin x=0\quad\Leftrightarrow\quad x=n\pi$$

och

$$\cos x=\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal.

(c) Eftersom $\arccos(-3/4)\in[0,\pi]$ så är $\sin(\arccos(-3/4))\geq 0$. Trigonometriska ettan visar därmed att

$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right)=\sqrt{1-\left(\cos\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right)^2}$$
$$=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Svar: (a) $x=\dfrac{8\pi}{15}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, eller $x=\dfrac{2\pi}{75}+\dfrac{2\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$,
(b) $x=n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$, eller $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$,
(c) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

4. (a) Genom att bryta ut e^{2x} i täljaren ser vi att

$$\frac{3e^{3x}-e^{2x}}{3e^x-1}=\frac{e^{2x}\left(3e^x-1\right)}{3e^x-1}=4\quad\Leftrightarrow\quad e^{2x}=4$$
$$\Leftrightarrow\quad 2x=\ln 4=\ln 2^2=2\ln 2$$
$$\Leftrightarrow\quad x=\ln 2.$$

Den enda lösningen ges således av $x=\ln 2$.

Alternativt. Om vi låter $t=e^x$ kan vi skriva om ekvationen enligt

$$\frac{3t^3-t^2}{3t-1}=4.$$

Här kan vi faktorisera täljaren enligt $3t^3 - t^2 = t^2(3t-1)$ och åter igen förkorta en faktor. Ser man inte det får man anta att $3t \neq 1$ (annars blir det nolldivision). Då gäller att

$$\frac{3t^3 - t^2}{3t-1} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3t^3 - t^2 - 12t + 4 = 0.$$

Gissning av rot ($t = 2$ till exempel) och polynomdivision visar att

$$3t^3 - t^2 - 12t + 4 = (t-2)(3t^2 + 5t - 2) = 3(t-2)(t+2)\left(t - \frac{1}{3}\right).$$

Kandidater är alltså $t = \pm 2$ och $t = \frac{1}{3}$. Vi har antagit att $3t \neq 1$ så $t = \frac{1}{3}$ är ingen lösning. Vidare måste $t > 0$ (eftersom $e^x > 0$ för alla x), så $t = -2$ ger inte heller någon lösning. Endast

$$t = e^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln 2$$

löser ekvationen.

(b) Från definitionen av e^{ix} erhåller vi att

$$(e^{ix})^2 = (\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + i2 \sin x \cos x = \cos 2x + i \sin 2x = e^{i2x}$$

där vi endast använt välkända formler för cosinus och sinus för dubbla vinkeln.

Svar: (a) $x = \ln 2$ (b) se ovan.

5. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. Vi ser direkt att $-1 \leq x \leq 1$ är kravet för att $\arcsin x$ ska vara definierad. Vidare får inte

$$\arcsin x = \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alltså blir

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 1,\ x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \left[-1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right[\cup \left] \frac{1}{\sqrt{2}},\ 1 \right].$$

Låt $x \in D_f$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = \frac{\pi/4 + \arcsin x}{\pi/4 - \arcsin x} \quad &\Leftrightarrow \quad y\left(\frac{\pi}{4} - \arcsin x\right) = \frac{\pi}{4} + \arcsin x \\ &\Leftrightarrow \quad \arcsin x = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{y-1}{y+1} \\ &\Rightarrow \quad x = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{y-1}{y+1}\right). \end{aligned}$$

Eftersom vi finner högst en lösning för varje y så måste detta vara ett uttryck för $f^{-1}(y)$. Observera att det **endast är implikation** i sista steget ovan!

Svar: $D_f = \left\{ x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 1,\ x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ och $f^{-1}(y) = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{y-1}{y+1}\right)$.

6. En binomisk ekvation löser vi genom att gå över till polära koordinater. Låt $z = re^{i\theta}$ för $r \geq 0$ och $\theta \in \mathbf{R}$. Vi söker alla lösningar till ekvationen

$$z^7 = r^7 e^{i7\theta} = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 - i}\right)^5. \tag{1}$$

Det komplexa talet $\sqrt{3}-i$ ligger i fjärde kvadranten och kan skrivas

$$\sqrt{3}-i = \sqrt{3+1}e^{-i\pi/6} = 2e^{-i\pi/6}.$$

På samma sätt,

$$1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

Detta medför att

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/6+i\pi/4}\right)^5 = 2^{5/2}e^{5\pi/12}.$$

För att (1) ska gälla måste högerledet och vänsterledet ha samma absolutbelopp och argumenten måste stämma överens upp till en heltalsmultipel av 2π. Således måste

$$r^7 = 2^{5/2} \quad \text{och} \quad 7\theta = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Eftersom $r \geq 0$ måste $r = 2^{5/14}$ (enda möjligheten), och θ kan vi lösa ut ur den andra ekvationen som

$$\theta = \frac{5\pi}{84} + \frac{2\pi n}{7},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Lösningarna till (1) ges alltså av

$$z = 2^{5/14}e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{2\pi n}{7}\right)}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Eftersom lösningarna ligger jämt fördelade på en cirkel och det finns precis 7 lösningar så räcker det med, tex, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Svar: $z = 2^{5/14}e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{2\pi n}{7}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

7. Enligt ledningen ska $\cos\frac{\pi}{18}$ vara en rot så vi börjar med att verifiera detta. Eftersom

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right) = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4},$$

vilket följer av Eulers formler och binomialsatsen, ser vi att

$$p\left(\cos\frac{\pi}{18}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} + 6\cos\frac{\pi}{18} - 6\cos\frac{\pi}{18} - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0.$$

Låt $a = \cos\frac{\pi}{18}$. Vi utför en polynomdivision med $x - a$.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
 & & 8x^2 & + & 8ax & + & 8a^2-6 & \\
\hline
 & 8x^3 & & - & 6x & - & \sqrt{3} & \multicolumn{1}{|l}{x-a} \\
\cline{8-8}
- & (8x^3 & -\ 8ax^2) & & & & & \\
\cline{1-7}
 & & 8ax^2 & - & 6x & - & \sqrt{3} & \\
 & - & (8ax^2 & - & 8a^2x) & & & \\
\cline{2-7}
 & & & & (8a^2-6)x & - & \sqrt{3} & \\
 & & & - & ((8a^2-6)x & - & (8a^3-6a)) & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & 8a^3-6a-\sqrt{3} &
\end{array}
$$

Observera här att sista raden blir noll eftersom $0 = p(a) = 8a^3 - 6a - \sqrt{3}$. Således kan vi nu faktorisera klart polynomet:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-a)\left(8x^2 + 8ax + 8a^2 - 6\right) \\ &= 8(x-a)\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2-3}{4}\right) \\ &= 8(x-a)\left(x + \frac{a+\sqrt{3-3a^2}}{2}\right)\left(x + \frac{a-\sqrt{3-3a^2}}{2}\right). \end{aligned}$$

Här är det viktigt att notera att $a^2 < 1$ eftersom $a = \cos\frac{\pi}{18}$, så kvadratrötterna ovan är definierade. Dessutom blir $\sqrt{1-a^2} = \sin\frac{\pi}{18}$ enligt den trigonometriska ettan, så svaret går att uttrycka lite enklare. Som svar kan man tänka sig ett av följande tre alternativ.

Svar:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2(x-a)\left(2x + a + \sqrt{3-3a^2}\right)\left(2x + a - \sqrt{3-3a^2}\right) \\ &= 2\left(x - \cos\frac{\pi}{18}\right)\left(2x + \cos\left(\frac{\pi}{18}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right)\left(2x + \cos\left(\frac{\pi}{18}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right) \\ &= 8\left(x - \cos\frac{\pi}{18}\right)\left(x + \cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)\right)\left(x + \cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)\right). \end{aligned}$$

I den sista likheten har vi använt hjälpvinkelmetoden för att slå ihop summorna av cos och sin.