Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2015–10–23 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter duggans slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Lös ekvationen $x = \sqrt{\dfrac{3-5x}{2}}$. (2 p)

   (b) Beräkna $\operatorname{Im}\left(\dfrac{3}{i-1} - i\dfrac{2}{2+i}\right)$. (1 p)

2. (a) Lös ekvationen $4^x - 2^{x+3} + 2^4 = 1$. (1 p)

   (b) För vilka reella x gäller sambandet $\ln(e^2x) = \dfrac{1}{\ln x}$? (2 p)

3. (a) Finn alla reella lösningar till ekvationen $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{8}\right) = \sin\left(6x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. (1 p)

   (b) Lös ekvationen $2\cos 2x = 1 + 4\cos x$. (2 p)

4. Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för f^{-1} om $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x-3}{x-5}\right)$.

5. Lös ekvationen $\dfrac{e^{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sin 2x\right)}}{e^{3\cos 2x}} = 1$.

6. (a) Skriv $\alpha = \arctan(-2) + \arctan(-3)$ på enklast möjliga form. (2 p)

   (b) Förenkla $\arctan(\tan 2)\dfrac{\arccos(\cos 2)}{\arcsin(\sin 2)}$ så långt som möjligt. (1 p)

7. Finn alla reella lösningar till $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k \cos^k 2x = (-1)^n 2^{n+1}$ för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Lösningsförslag TATM79 2015-10-23 08–12

1. (a) Vi kvadrerar ekvationen och undersöker vilka kandidater som finns:

$$x = \sqrt{\frac{3-5x}{2}} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{3-5x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2+5x-3=0$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \text{ eller } x=-3.$$

Vi ser direkt att $x=-3$ är omöjlig eftersom vänsterledet då blir negativt. Direkt kontroll visar att

$$\text{H.L.} = \sqrt{\frac{3-5\cdot\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = \text{V.L.}$$

så $x=\dfrac{1}{2}$ är en lösning.

(b) Vi förlänger med konjugatet till respektive nämnare för att få bort alla imaginära storheter i nämnarna:

$$\frac{3}{i-1} - i\frac{2}{2+i} = \frac{3(-i-1)}{2} - i\frac{2(2-i)}{5} = -\frac{19}{10} - \frac{23}{10}i.$$

Imaginärdelen blir således $-\dfrac{23}{10}$ (inget i här!).

Svar: (a) $x=\dfrac{1}{2}$ (b) $-\dfrac{23}{10}$.

2. (a) Om vi studerar ekvationen ser vi att x förekommer som 2^x och 4^x. En lämplig substitution utgörs alltså av $t=2^x$ (så $t>0$). Ekvationen kan då ekvivalent formuleras som

$$t^2-8t+16=1 \quad \Leftrightarrow \quad (t-4)^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad t=5 \text{ eller } t=3.$$

Vi återgår nu till den ursprungliga variabeln:

$$2^x = t = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x\ln 2 = \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

och

$$2^x = t = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x\ln 2 = \ln 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln 5}{\ln 2}.$$

(b) För att alla logaritmer i ekvationen ska vara definierade krävs att $x>0$. Vidare måste $x\neq 1$ (varför?). Antag att x uppfyller dessa villkor. Då gäller att

$$\ln\left(e^2x\right) = \frac{1}{\ln x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln e^2 + \ln x = \frac{1}{\ln x} \quad \Leftrightarrow \quad (\ln x)(2+\ln x)=1$$
$$\Leftrightarrow \quad (\ln x)^2 + 2\ln x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+\ln x)^2 - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln x = -1\pm\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp\left(-1\pm\sqrt{2}\right),$$

där båda lösningarna uppfyller villkoren.

Svar: (a) $x=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ eller $x=\dfrac{\ln 5}{\ln 2}$ (b) $x=\exp\left(-1\pm\sqrt{2}\right)$.

3. (a) Ur enhetscirkeln ser vi att

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(6x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - \dfrac{\pi}{8} = 6x + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \\ \qquad \text{eller} \\ 2x - \dfrac{\pi}{8} = \pi - \left(6x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\pi n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{3\pi}{32} - \dfrac{\pi n}{2} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{7\pi}{64} + \dfrac{\pi n}{4}, \end{cases}$$

där n är ett godtyckligt heltal.

(b) Eftersom $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ gäller att

$$\begin{aligned} 2\cos 2x = 1 + 4\cos x \quad &\Leftrightarrow \quad 2(2\cos^2 x - 1) = 1 + 4\cos x \\ &\Leftrightarrow \quad 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0. \end{aligned}$$

Låt $t = \cos x$ (så $-1 \leq t \leq 1$). Då ges ekvationen ovan av

$$0 = 4t^2 - 4t - 3 = 4\left(t^2 - t - \frac{3}{4}\right) = 4\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) = 4\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{3}{2}\right).$$

Om $t = \dfrac{3}{2}$ saknas lösningar till $t = \cos x$. Om $t = -\dfrac{1}{2}$ blir

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

där $n \in \mathbf{Z}$.

Svar: (a) $-\dfrac{3\pi}{32} - \dfrac{\pi n}{2}$ eller $\dfrac{7\pi}{64} + \dfrac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$ (b) $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

4. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. Argumentet till ln måste vara positivt, så

$$\frac{2x-3}{x-5} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 5 \text{ eller } x < \frac{3}{2}.$$

Detta kan ses med hjälp av tex en teckentabell:

		$\frac{3}{2}$		5	
$2x-3$	$-$	0	$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{2x-3}{x-5}$	$+$	0	$-$	☠	$+$

Definitionsmängden blir således

$$D_f = \left\{x \in \mathbf{R} : x < \frac{3}{2} \text{ eller } x > 5\right\}.$$

För $x \in D_f$ gäller att

$$\begin{aligned} y = \ln\left(\frac{2x-3}{x-5}\right) \quad &\Rightarrow \quad e^y = \frac{2x-3}{x-5} \\ &\Rightarrow \quad (x-5)e^y = 2x-3 \\ &\Rightarrow \quad x(e^y-2) = 5e^y-3 \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{5e^y-3}{e^y-2}. \end{aligned}$$

Den sista implikationen är ok ty $y \neq \ln 2$ om $x \in D_f$. Vi finner endast en lösning, vilket innebär att $f^{-1}(y) = \dfrac{5e^y-3}{e^y-2}$.

Svar: $D_f = \left\{x \in \mathbf{R} : x < \dfrac{3}{2} \text{ eller } x > 5\right\}$ och $f^{-1}(y) = \dfrac{5e^y-3}{e^y-2}$.

5. Ekvationen kan formuleras om enligt

$$\begin{aligned} \frac{\exp(\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sin 2x))}{\exp(3\cos 2x)} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \exp(\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sin 2x)) = \exp(3\cos 2x) \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{6} = \sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\sqrt{(-\sqrt{3})^2+3^2} = \sqrt{12}\right] \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\sin 2x + \frac{3}{\sqrt{12}}\cos 2x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x \end{aligned}$$

eftersom exp är injektiv. Tanken är här att koefficienterna före $\sin 2x$ och $\cos 2x$ ska utgöra koordinater för en punkt på enhetscirkeln. Vi skriver om högerledet med hjälpvinkelomskrivning som

$$\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \sin(2x+v) = \sin v \cos 2x + \cos v \sin 2x$$

där $\cos v = \dfrac{1}{2}$ och $\sin v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. En vinkel v som uppfyller detta är $v = \dfrac{\pi}{3}$. Vi återgår till att lösa ekvationen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\pi}{4} = 2x + \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \\ \text{eller} \\ \dfrac{3\pi}{4} = 2x + \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} x = -\dfrac{\pi}{24} - \pi n \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{5\pi}{24} - \pi n, \end{array}\right. \end{aligned}$$

där $n \in \mathbf{Z}$.

Svar: $x = -\dfrac{\pi}{24} - \pi n$, $x = \dfrac{5\pi}{24} - \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. (a) Låt
$$\alpha = \arctan(-2) + \arctan(-3).$$
Då är
$$\tan(\alpha) = \frac{\tan(\arctan(-2)) + \tan(\arctan(-3))}{1 - \tan(\arctan(-2))\tan(\arctan(-3))} = \frac{-5}{1-6} = 1.$$
Eftersom
$$\tan v = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z},$$
så måste $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$ för *något* $n \in Z$. Eftersom α är en given vinkel, finns det bara ett n som är rätt. Det återstår alltså bara att bestämma n och för att göra det **måste** vi ha en uppfattning om hur stor α är. Således,
$$-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\arctan(0) = 0$$
eftersom arctan är strängt växande. Detta innebär att $n \geq 0$ ej är möjligt. Vidare blir $n < -1$ för litet. Om $n = -1$ hamnar $\dfrac{\pi}{4} - \pi = -\dfrac{3\pi}{4}$ i rätt intervall. Alltså är $\alpha = -\dfrac{3\pi}{4}$.

(b) Vi skriver om argumenten till vinklar som ligger i lämpligt område och erhåller då
$$\begin{aligned}\arctan(\tan 2)\frac{\arccos(\cos 2)}{\arcsin(\sin 2)} &= \arctan(\tan(2-\pi))\frac{\arccos(\cos 2)}{\arcsin(\sin(\pi - 2))} \\ &= (2-\pi)\frac{2}{\pi - 2} = -2\end{aligned}$$
eftersom $\dfrac{\pi}{2} < 2 < \pi$ så $2 \in [0,\pi]$ och $\arccos(\cos x) = x$ för $x \in [0,\pi]$, $2-\pi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ och $\arctan(\tan x) = x$ för $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, samt $\pi - 2 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ och $\arcsin(\sin x) = x$ för $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Svar: (a) $-\dfrac{3\pi}{4}$ (b) -2.

7. Uttrycket påminner om binomialsatsen, så vi försöker skriva om enligt detta:
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^k\cos^k(2x) = (-1)^n 2^{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^n\frac{1}{2^n}(-2)^k\cos^k(2x) = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{1}{2^{n-k}}\cos^k(2x) = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}\cos^k(2x) = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(-\frac{1}{2} + \cos(2x)\right)^n = 2.\end{aligned}$$

Således ska vi lösa en ekvation på formen $t^n = 2$, vilket eftersom $t \in \mathbf{R}$ innebär att $t = 2^{1/n}$ om n är udda och $t = \pm 2^{1/n}$ om n är jämn. Alltså,
$$-\frac{1}{2} + \cos(2x) = 2^{1/n} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2x) = \frac{1}{2} + 2^{1/n}$$

vilket saknar lösningar eftersom $2^{1/n} > 1$ för alla $n \geq 1$. Detta innebär att det inte finns några lösningar om n är udda. Om n är jämn så finns även möjligheten att

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} + \cos(2x) = -2^{1/n} \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(2x) = \frac{1}{2} - 2^{1/n} \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = \pm \arccos\left(\frac{1}{2} - 2^{1/n}\right) + 2\pi m \\
&\Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{2} - 2^{1/n}\right) + \pi m,
\end{aligned}$$

där $m \in \mathbf{Z}$. Här är arccos-termen definierad eftersom

$$-1 < \frac{1}{2} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2} - 2^{1/n} \leq \frac{1}{2}$$

för alla $n \geq 2$.

Svar: $\pm\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{2} - 2^{1/n}\right) + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$ om $n = 2, 4, 6, \ldots$. Om n är udda saknas lösning.