Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2015–09–28 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter duggans slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=100}^{300}(2k-50)$. (1 p)

   (b) Lös olikheten $\dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{2x+1}$. (1 p)

   (c) När polynomet $p(x)$ divideras med x^2+x-2 fås kvoten $2x-4$ och resten $-6x+8$. Bestäm $p(x)$. (1 p)

2. (a) Lös ekvationen $\ln(2-x)-\ln(-x)-2\ln 2+\ln(8+x)=0$. (2 p)

   (b) För vilka reella x gäller sambandet $\ln(x+2)^2=2$? (1 p)

3. Skriv $\cos 7x\sin^2 3x$ som en summa av cos- och/eller sin-termer.

   Lös också ekvationen $4\cos 7x\sin^2 3x=\cos x-\cos 13x$.

4. (a) Finn alla lösningar till ekvationen $\sqrt{2}\sin 3x=1$ (1 p)

   (b) Beräkna $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)\right)$. (1 p)

   (c) Beräkna $\tan\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)$. (1 p)

5. Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för f^{-1} om $f(x)=e^{\frac{1+\ln x}{\ln 2x}}\left(=\exp\left(\dfrac{1+\ln x}{\ln 2x}\right)\right)$.

6. (a) Visa att $\dfrac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$ för alla reella x och y.
   Räknelagar och egenskaper för ln får användas utan bevis. (1 p)

   (b) Lös ekvationen $(z-5)^5=i+\sqrt{3}$. (2 p)

7. Funktionen f ges av uttrycket $f(x)=\tan(x^2-6x+11)$. Man vet också att D_f är det största möjliga intervallet sådant att f^{-1} existerar och $2\in D_f$. Bestäm D_f samt ett uttryck för f^{-1}.

Lösningsförslag TATM79 2015-09-28 08–12

1. (a) Summan är aritmetisk och kan därmed beräknas enligt

$$\sum_{k=100}^{300}(2k-50)=\frac{150+550}{2}\cdot 201=70350.$$

(b) Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{1}{x-1}>\frac{1}{2x+1}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2x+1}>0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x+2}{(x-1)(2x+1)}>0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		-2		$-\frac{1}{2}$		1	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2(x+1/2)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x+2}{(x-1)(2x+1)}$	$-$	0	$+$	☠	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är positivt precis då $-2<x<-\frac{1}{2}$ eller $x>1$.

(c) Enligt definition av kvot och rest gäller att

$$p(x)=(2x-4)(x^2+x-2)+(-6x+8)=2x^3-2x^2-14x+16.$$

Svar: (a) 70350 (b) $-2<x<-\frac{1}{2}$ eller $x>1$ (c) $2x^3-2x^2-14x+16$.

2. (a) För att alla logaritmer i ekvationen ska vara definierade krävs att $x<2$, $x<0$, samt $x>-8$. Totalt sett måste vi alltså kräva att $-8<x<0$. Antag att x uppfyller detta villkor. Då gäller att

$$\begin{aligned}\ln(2-x)-\ln(-x)-2\ln 2+\ln(8+x)=0\quad&\Leftrightarrow\quad\ln((2-x)(8+x))=\ln(-4x)\\&\Leftrightarrow\quad(2-x)(8+x)=-4x\\&\Leftrightarrow\quad x^2+2x-16=0\\&\Leftrightarrow\quad x=-1\pm\sqrt{17},\end{aligned}$$

där $x=-1+\sqrt{17}$ inte uppfyller villkoret.

(b) För att logaritmen ska vara definierad krävs att $(x+2)^2>0$, vilket är ekvivalent med att $x\neq-2$. Om detta är sant så är

$$\ln(x+2)^2=2\quad\Leftrightarrow\quad(x+2)^2=e^2\quad\Leftrightarrow\quad x=-2\pm e.$$

Ingen av kandidaterna blir lika med -2, så både löser ekvationen (testa).

Svar: (a) $x=-1-\sqrt{17}$ (b) $x=-2\pm e$.

3. Enligt Eulers formler kan vi skriva

$$
\begin{aligned}
\cos 7x \sin^2 3x &= \left(\frac{e^{i7x}+e^{-i7x}}{2}\right)\left(\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right)^2 \\
&= \frac{1}{-8}\left(e^{i7x}+e^{-i7x}\right)\left(e^{i6x}-2+e^{-i6x}\right) \\
&= \frac{1}{-8}\left(e^{i13x}+e^{ix}+e^{-ix}+e^{-i13x}-2(e^{i7x}+e^{-i7x})\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2\cos 7x-\cos x-\cos 13x\right).
\end{aligned}
$$

Ekvationen vi vill lösa kan därför skrivas

$$
\begin{aligned}
4\cos 7x \sin^2 3x = \cos x - \cos 13x \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos 7x - \cos x - \cos 13x = \cos x - \cos 13x \\
&\Leftrightarrow \quad \cos 7x = \cos x \\
&\Leftrightarrow \quad 7x = \pm x + 2\pi n.
\end{aligned}
$$

Således blir lösningarna

$$
x = \frac{\pi n}{4} \text{ eller } x = \frac{\pi n}{3}, \ n \in \mathbf{Z}.
$$

Svar: $\cos 7x \sin^2 3x = \frac{1}{4}\left(2\cos 7x - \cos x - \cos 13x\right)$; $x = \frac{\pi n}{4}$ eller $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. (a) Ur enhetscirkeln ser vi att

$$
\sqrt{2}\sin 3x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ \quad \text{eller} \\ 3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ \quad \text{eller} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}, \end{cases}
$$

där n är ett godtyckligt heltal.

(b) Vi vet att $\cos(-v) = \cos v$, så

$$
\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}
$$

eftersom $0 \leq \frac{\pi}{5} \leq \pi$.

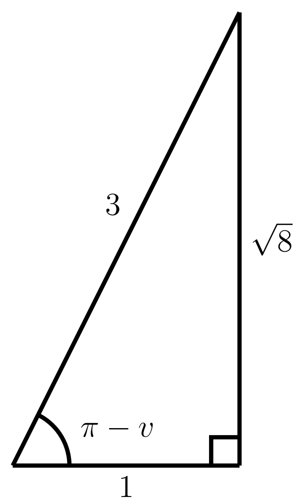
(c) Låt $v = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Då vet vi att $\tan v < 0$ eftersom vi är i andra kvadranten. Vi "flyttar" vinkeln genom att skriva

$$
\cos v = -\frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\pi - v) = \frac{1}{3}.
$$

Eftersom $\pi - v \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ger en vettig rätvinklig hjälptriangel med kateterna 1 och $\sqrt{9-1} = \sqrt{8}$ att

$$
\tan v = -\tan(\pi - v) = -\frac{\sqrt{8}}{1} = -\sqrt{8}.
$$



Svar: (a) $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi n}{3}$ eller $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$ (b) $\dfrac{\pi}{5}$ (c) $-\sqrt{8}$

5. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. Vi ser direkt att $x > 0$ är kravet för att båda logaritmerna ska vara definierade. Vidare får inte

$$\ln 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Alltså blir

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R} : x > 0,\ x \neq \frac{1}{2} \right\}.$$

Låt $x \in D_f$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = \exp\left(\frac{1+\ln x}{\ln 2x}\right) \quad &\Rightarrow \quad \ln y = \frac{1+\ln x}{\ln 2x} \\ &\Rightarrow \quad \ln y = \frac{1+\ln x}{\ln 2 + \ln x} \\ &\Rightarrow \quad (1-\ln y)\ln x = (\ln 2)\ln y - 1 \\ &\Rightarrow \quad \ln x = \frac{(\ln 2)\ln y - 1}{1-\ln y} \\ &\Rightarrow \quad x = \exp\left(\frac{(\ln 2)\ln y - 1}{1-\ln y}\right). \end{aligned}$$

Eftersom vi finner högst en lösning för varje y så måste detta vara ett uttryck för $f^{-1}(y)$.

Svar: $D_f = \left\{x \in \mathbf{R} : x > 0,\ x \neq \frac{1}{2}\right\}$ och $f^{-1}(y) = \exp\left(\dfrac{(\ln 2)\ln y - 1}{1-\ln y}\right)$.

6. (a) Eftersom $e^a > 0$ för alla $a \in \mathbf{R}$ kan vi skriva

$$\frac{e^x}{e^y} = \exp\left(\ln \frac{e^x}{e^y}\right) = \exp\left(\ln e^x - \ln e^y\right) = \exp(x-y) = e^{x-y},$$

där vi endast använt välkända logaritmlagar och att exp och ln är varandras inverser.

(b) En binomisk ekvation löser vi genom att gå över till polära koordinater. Först låter vi $w = z - 5$ och skriver sedan $w = re^{i\theta}$ för $r > 0$ och $\theta \in \mathbf{R}$. Vi söker alla lösningar till ekvationen

$$w^5 = r^5 e^{i5\theta} = i + \sqrt{3}. \tag{1}$$

Det komplexa talet $i + \sqrt{3}$ ligger i första kvadranten och kan skrivas

$$i + \sqrt{3} = \sqrt{1+3}e^{i\pi/6} = 2e^{i\pi/6}.$$

För att (1) ska gälla måste högerledet och vänsterledet ha samma absolutbelopp och argumenten måste stämma överens upp till en heltalsmultipel av 2π. Således måste

$$r^5 = 2 \quad \text{och} \quad 5\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Eftersom $r > 0$ måste $r = 2^{1/5}$ (enda möjligheten), och θ kan vi lösa ut ur den andra ekvationen som

$$\theta = \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Eftersom lösningarna ligger jämt fördelade på en cirkel och det finns precis 5 lösningar så räcker det med, tex, $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Lösningarna till (1) ges alltså av

$$w = 2^{1/5} e^{i\left(\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Om vi går tillbaka till z (eftersom $w = z - 5$) ges alltså lösningarna av

$$z = 5 + 2^{1/5} e^{i\left(\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Svar: (a) Se ovan (b) $z = 5 + 2^{1/5} e^{i\left(\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$

7. För att $f(x)$ ska vara definierad på ett sammanhängande intervall måste vi kräva att

$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < x^2 - 6x + 11 < \frac{\pi}{2} + n\pi \tag{2}$$

för något $n \in \mathbf{Z}$. Det går inte att ta med fler punkter eftersom $\tan(t)$ ej är definierad då $t = \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$ för $n \in \mathbf{Z}$, så det skulle resultera i något som inte är *ett* intervall. Vidare vill vi att $2 \in D_f$ och eftersom $x^2 - 6x + 11 = 3$ om $x = 2$ så måste vi välja $n = 1$ i (2). Vi löser ut x ur villkoret i (2) och finner att

$$0 < (x-3)^2 + 2 - \frac{\pi}{2}$$

för alla x, så den vänstra olikheten är OK. För den högra finner vi att

$$(x-3)^2 + 2 < \frac{3\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - 3 - \sqrt{\frac{3\pi}{2} - 2}\right)\left(x - 3 + \sqrt{\frac{3\pi}{2} - 2}\right) < 0,$$

vilket händer precis när (gör en teckentabell!)

$$3 - \sqrt{\frac{3\pi}{2} - 2} < x < 3 + \sqrt{\frac{3\pi}{2} - 2}. \tag{3}$$

Nu återstår frågan om $x \mapsto \tan(x^2 - 6x + 11)$ är injektiv på detta intervall. Det visar sig att så inte är fallet på grund av 2:a-gradspolynomet. Från kvadratkompletteringen av polynomet ser vi att

$$x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2$$

och därmed har polynomet ett minimum i $x = 3$ och är strängt avtagande för $x \leq 3$ och strängt växande för $x \geq 3$. Eftersom vi vill ha $2 \in D_f$ ger (3) och $2 \leq 3$ att

$$3 - \sqrt{\frac{3\pi}{2} - 2} < x \leq 3$$

är nödvändigt och tillräckligt för att f^{-1} ska existera. Detta villkor ger alltså vårt D_f. Nu återstår bara att räkna ut ett uttryck för denna invers. Vi sätter $y = f(x)$ och antar att $x \in D_f$. Eftersom

$$y = \tan t, \ \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t = \pi + \arctan y,$$

så gäller att

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Rightarrow \quad \pi + \arctan y = x^2 - 6x + 11 \\ &\Rightarrow \quad (x-3)^2 + 2 - \arctan y - \pi = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = 3 \pm \sqrt{\pi - 2 + \arctan y}. \end{aligned}$$

Eftersom $x \leq 3$ för $x \in D_f$ så är det endast den negativa roten som ger en lösning. Således blir

$$f^{-1}(y) = 3 - \sqrt{\pi - 2 + \arctan y}.$$

Svar: $D_f = \left]3 - \sqrt{\frac{3\pi}{2} - 2},\ 3\right]$, $f^{-1}(y) = 3 - \sqrt{\pi - 2 + \arctan y}$.