Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2014–10–24 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter duggans slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Vilka reella x uppfyller sambandet $|x+1|-2x=3$? (1 p)

   (b) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=3}^{327}(3k+5)$. (1 p)

   (c) Beräkna $\displaystyle\binom{12}{7}$. (1 p)

2. (a) Lös ekvationen $\ln(x-1)^2-\ln 2=\ln(5-x)+\ln(-2-x)$. (2 p)

   (b) För vilka reella x är $6e^{-x}-3e^{x}=7$? (1 p)

3. (a) Finn alla lösningar till ekvationen $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(5\alpha+\frac{\pi}{7}\right)$. (1 p)

   (b) Beräkna $\tan\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$. (1 p)

   (c) Skriv $\arcsin\left(\sin\frac{34\pi}{5}\right)$ på enklaste form. (1 p)

4. Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för f^{-1} om $f(x)=\ln\left(7-e^{\sqrt{x}}\right)$.

5. (a) Beräkna $\left|4+i\frac{i}{i-1}\right|$. (1 p)

   (b) Finn alla komplexa lösningar till ekvationen $z^6+32(1+i\sqrt{3})=0$. (2 p)

6. Finn något a och något b så att $2\sin ax\sin bx=\cos 3x-\cos 7x$.

   Lös också ekvationen $\cos 3x-\cos 7x=\sin 2x$.

7. Lös ekvationen $\displaystyle\frac{\pi}{3}+\arccos x=\arccos\left(\frac{1-x}{2}\right)$.

Dugga 2 i TATM79, 2014-10-24, lösningsförslag

1. (a) Falluppdelning, $|x+1| = \begin{cases} x+1 \text{ , om } x \geq -1 \\ -x-1 \text{ , om } x \leq -1. \end{cases}$

För $x \geq -1$ fås $|x+1| - 2x = 3 \iff x+1-2x = 3 \iff x = -2$, som ej uppfyller villkoret $x \geq -1$. Således finns ingen lösning då $x \geq -1$.

För $x \leq -1$ fås $|x+1| - 2x = 3 \iff -x-1-2x = 3 \iff x = -\dfrac{4}{3}$, som uppfyller villkoret $x \leq -1$. Således är $x = -\dfrac{4}{3}$ en lösning (och därmed den enda lösningen).

Svar: $x = -\dfrac{4}{3}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{327}(3k+5)$ är en aritmetisk summa med första term $= 14$, sista term $= 986$ och med antal termer $= 327 - 3 + 1 = 325$, så $\displaystyle\sum_{k=3}^{327}(3k+5) = 325 \cdot \frac{14+986}{2} = 162\,500.$

Svar: $162\,500$.

(c) $\dbinom{12}{7} = \dbinom{12}{12-7} = \dbinom{12}{5} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792.$

Svar: 792.

2. (a) Logaritmerna är definierade förutsatt att $(x-1)^2 > 0$, $5 - x > 0$ och $-2 - x > 0$, dvs då $x < -2$. För dessa x fås

$\ln(x-1)^2 - \ln 2 = \ln(5-x) + \ln(-2-x) \iff \ln(x-1)^2 = \ln\left(2(5-x)(-2-x)\right)$

$\iff \Big/ \text{ln är injektiv} \Big/ \iff (x-1)^2 = 2(5-x)(-2-x)$

$\iff x^2 - 4x - 21 = 0 \iff (x-2)^2 - 25 = 0 \iff x = 2 \pm 5$

$\iff x = -3$ eller $x = 7$. Av dessa båda är det endast $x = -3$ som uppfyller villkoret $x < -2$, dvs $x = -3$ är enda lösningen.

Svar: $x = -3$.

(b) $6e^{-x} - 3e^x = 7 \iff 6 - 3\,(e^x)^2 = 7e^x \iff \Big/ \text{Sätt } t = e^x > 0 \Big/$

$\iff 6 - 3t^2 = 7t \iff t^2 + \dfrac{7}{3}t - 2 = 0 \iff \left(t + \dfrac{7}{6}\right)^2 - \dfrac{121}{36} = 0$

$\iff t = -\dfrac{7}{6} \pm \dfrac{11}{6} \iff t = \dfrac{2}{3}$ (eller $t = -3$, men $t > 0$) $\iff e^x = \dfrac{2}{3}$

$\iff x = \ln\dfrac{2}{3}$.

Svar: $x = \ln\dfrac{2}{3}$.

3. (a) $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(5\alpha + \dfrac{\pi}{7}\right) \iff 5\alpha + \dfrac{\pi}{7} = \pm\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) + n2\pi$

$$\iff \begin{cases} 4\alpha = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{7} + n2\pi \\ \text{eller} \\ 6\alpha = -\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{7} + n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{\pi}{21} + \dfrac{n\pi}{2} \\ \text{eller} \\ \alpha = -\dfrac{5\pi}{63} + \dfrac{n\pi}{3} \end{cases} \text{ där } n \text{ är heltal.}$$

Svar: $\begin{cases} \alpha = \dfrac{\pi}{21} + \dfrac{n\pi}{2} \\ \text{eller} \\ \alpha = -\dfrac{5\pi}{63} + \dfrac{n\pi}{3} \end{cases}$ där n är heltal.

(b) Låt $\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$. Då fås att $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, eftersom $-1 < -\frac{3}{4} < 0$. Därmed är $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$ och $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \Big/\text{eftersom } \sin\alpha > 0\Big/ = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Således är $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Svar: $-\frac{\sqrt{7}}{3}$.

(c) $\sin\frac{34\pi}{5} = \sin\left(7\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5}$ och eftersom $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$ så är $\arcsin\left(\sin\frac{34\pi}{5}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$.

Svar: $\frac{\pi}{5}$.

4. $f(x)$ är definierad då $7 - e^{\sqrt{x}} > 0 \iff e^{\sqrt{x}} < 7$
$\iff \Big/\text{exponentialfunktionen är strängt växande}\Big/$
$\iff \sqrt{x} < \ln 7 \iff 0 \leq x < (\ln 7)^2$. För dessa x fås
$y = \ln\left(7 - e^{\sqrt{x}}\right) \iff e^y = 7 - e^{\sqrt{x}} \iff e^{\sqrt{x}} = 7 - e^y \iff \sqrt{x} = \ln(7-e^y) \implies x = (\ln(7-e^y))^2$ dvs ekvationen $y = f(x)$ har högst en lösning för varje y vilket visar att f är injektiv och att $f^{-1}(y) = (\ln(7-e^y))^2$.

Svar: $D_f = \{x : 0 \leq x < (\ln 7)^2\},\ f^{-1}(x) = (\ln(7-e^x))^2$.

5. (a) $\left|4 + i\frac{i}{i-1}\right| = \left|\frac{4i-4+i^2}{i-1}\right| = \frac{|4i-5|}{|i-1|} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}}$.

Svar: $\sqrt{41/2}$.

(b) Vi har $-(1+i\sqrt{3}) = -2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ så om vi sätter $z = re^{i\varphi}$ där $r \geq 0, \varphi \in \mathbf{R}$, så fås $z^6 + 32(1+i\sqrt{3}) = 0 \iff r^6e^{i6\varphi} = 64e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$$\iff \begin{cases} r^6 = 2^6 & \text{(absolutbelopp lika)} \\ 6\varphi = \frac{4\pi}{3} + n2\pi,\ n \in \mathbf{Z} & \text{(riktning lika)} \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \frac{2\pi}{9} + n\frac{\pi}{3},\ n \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$\iff z = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + n\frac{\pi}{3}\right)}, \quad n = 0,1,2,3,4,5.$

Svar: $z = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + n\frac{\pi}{3}\right)},\ n = 0,1,2,3,4,5$.

6. Med hjälp av Eulers formler fås att $2\sin ax \sin bx = 2\frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i} \cdot \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}$ $= -\frac{1}{2}\left(e^{i(a+b)x} + e^{-i(a+b)x} - e^{i(a-b)x} - e^{-i(a-b)x}\right) = \cos\left((a-b)x\right) - \cos\left((a+b)x\right)$ så sambandet $2\sin ax \sin bx = \cos 3x - \cos 7x$ gäller för alla reella tal x om till exempel $a - b = 3$ och $a + b = 7$. Detta ekvationssystem har lösningen $a = 5, b = 2$. Använder vi ovanstående omskrivning så fås
$\cos 3x - \cos 7x = \sin 2x \iff 2\sin 5x \sin 2x = \sin 2x \iff 2\sin 2x\left(\sin 5x - \frac{1}{2}\right) = 0$
$\iff \sin 2x = 0$ eller $\sin 5x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \iff 2x = n\pi$ eller $5x = \frac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $5x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$, där n är heltal $\iff x = n\frac{\pi}{2}$ eller $x = \frac{\pi}{30} + n\frac{2\pi}{5}$ eller $x = \frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{5}$.
Svar: Tex $a = 5, b = 2$. $x = n\frac{\pi}{2}$ eller $x = \frac{\pi}{30} + n\frac{2\pi}{5}$ eller $x = \frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{5}$, där n är heltal.

7. För att bägge leden ska vara väldefinierade, måste x och $\frac{1-x}{2}$ tillhöra intervallet $[-1,1] = D_{\text{arccos}}$. Eftersom högerledet tillhör intervallet $[0,\pi] = V_{\text{arccos}}$ så måste vänsterledet göra det också så $\arccos x \le \frac{2\pi}{3}$, dvs $-\frac{1}{2} \le x \le 1$. Om x uppfyller detta så gäller

$$\frac{\pi}{3} + \arccos x = \arccos \frac{1-x}{2} \iff \Big/ \begin{array}{c}\text{bägge led tillhör } [0,\pi] \text{ och cos är injektiv}\\ \text{på detta intervall med inversen arccos}\end{array} \Big/$$

$$\iff \cos\left(\frac{\pi}{3} + \arccos x\right) = \frac{1-x}{2} \iff \cos\frac{\pi}{3}\cos(\arccos x) - \sin\frac{\pi}{3}\sin(\arccos x) = \frac{1-x}{2}$$

$$\iff \Big/ \sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} \text{ om } y \in [0,\pi] \Big/ \iff \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} = \frac{1-x}{2}$$

$$\iff 2x - 1 = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} \iff (2x-1)^2 = 3(1-x^2) \text{ och } 2x - 1 \ge 0$$

$$\iff x^2 - \frac{4}{7}x - \frac{2}{7} = 0 \text{ och } x \ge \frac{1}{2} \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{18}}{7} \text{ och } x \ge \frac{1}{2} \iff \Big/ 4 < \sqrt{18} \Big/$$

$$\iff x = \frac{2+\sqrt{18}}{7}$$

För att räkningarna ska vara korrekta, måste $-\frac{1}{2} \le x \le 1$. Detta stämmer för vårt framräknade x eftersom $\sqrt{18} < 5$.

Svar: $x = \frac{2+\sqrt{18}}{7}$.