Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2014–09–29 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter duggans slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=5}^{200} \frac{3^k}{4}$. (1 p)

   (b) Lös olikheten $\dfrac{x-1}{x} > \dfrac{x}{x-1}$. (1 p)

   (c) Bestäm $|z|$ om $z = \dfrac{(1-i)^5}{i(\sqrt{3}+i)^3}$. (1 p)

2. (a) För vilka reella x gäller sambandet $3 \cdot 2^x = 4 \cdot 5^x$? (1 p)

   (b) Lös ekvationen $\ln(5-2x) = 2\ln(x-1) - \ln(3-x)$. (2 p)

3. (a) Finn alla lösningar till ekvationen $\cos\left(4v + \dfrac{3\pi}{8}\right) = \sin 2v$ (1 p)

   (b) Beräkna $\tan(\arcsin \dfrac{3}{\sqrt{17}})$. (1 p)

   (c) Skriv $z = 7i - 1$ på polär form. (1 p)

4. Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för f^{-1} om $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5}$.

5. Lös ekvationen $\sqrt{3}\cos 3x = 1 + \sin 3x$.

6. Skriv $\alpha = \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{7} - \arccos\left(-\dfrac{6}{\sqrt{39}}\right)$ på enklast möjliga form.

7. Finn alla reella lösningar till $\dfrac{e^x - 2}{\sqrt{2e^x - a}} = 1$ för alla värden på konstanten $a \in \mathbf{R}$.

Dugga 2 i TATM79, 2014-09-29, lösningsförslag

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=5}^{200} \frac{3^k}{4}$ är en geometrisk summa med första term $= \dfrac{3^5}{4}$, kvot $= 3$ och med antal termer $= 200 - 5 + 1 = 196$, så $\displaystyle\sum_{k=5}^{200} \frac{3^k}{4} = \frac{3^5}{4} \cdot \frac{3^{196} - 1}{3 - 1} = \frac{3^5}{8}\left(3^{196} - 1\right)$.

Svar: $\dfrac{3^5}{8}\left(3^{196} - 1\right)$.

(b) $\dfrac{x-1}{x} > \dfrac{x}{x-1} \iff \dfrac{x-1}{x} - \dfrac{x}{x-1} > 0 \iff \dfrac{(x-1)^2 - x^2}{x(x-1)} > 0 \iff$
$\iff \dfrac{1-2x}{x(x-1)} > 0$. Teckentabellen

x		0		$\frac{1}{2}$		1	
$1-2x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{1-2x}{x(x-1)}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

visar att olikheten gäller då $x < 0$ eller $\dfrac{1}{2} < x < 1$.

Svar: $x < 0$ eller $\dfrac{1}{2} < x < 1$.

(c) $|z| = \left|\dfrac{(1-i)^5}{i(\sqrt{3}+1)^3}\right| = \dfrac{|1-i|^5}{|i| \cdot |\sqrt{3}+i|^3} = \dfrac{\left(\sqrt{1^2 + (-1)^2}\right)^5}{1 \cdot \left(\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}\right)^3} = \dfrac{(\sqrt{2})^5}{2^3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Svar: $|z| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. (a) $3 \cdot 2^x = 4 \cdot 5^x \iff \big/$ båda led är positiva och ln är injektiv $\big/ \iff$
$\iff \ln(3 \cdot 2^x) = \ln(4 \cdot 5^x) \iff \ln 3 + x \ln 2 = \ln 4 + x \ln 5 \iff$
$\iff x(\ln 5 - \ln 2) = \ln 3 - \ln 4 \iff x = \dfrac{\ln 3 - \ln 4}{\ln 5 - \ln 2}$.

Svar: $x = \dfrac{\ln 3 - \ln 4}{\ln 5 - \ln 2}$.

(b) Logaritmerna är definierade förutsatt att $5 - 2x > 0,\ x - 1 > 0$ och $3 - x > 0$, dvs då $1 < x < \dfrac{5}{2}$. För dessa x fås
$\ln(5-2x) = 2\ln(x-1) - \ln(3-x) \iff \ln\left((5-2x)(3-x)\right) = \ln(x-1)^2 \iff$
$\iff \big/$ ln är injektiv $\big/ \iff (5-2x)(3-x) = (x-1)^2 \iff x^2 - 9x + 14 = 0 \iff$
$\iff \left(x - \dfrac{9}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = 0 \iff x = 7$ eller $x = 2$, men eftersom $1 < x < \dfrac{5}{2}$ så följer att enda lösningen är $x = 2$.

Svar: $x = 2$.

3. (a) $\cos\left(4v+\frac{3\pi}{8}\right)=\sin 2v \iff \cos\left(4v+\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2v\right) \iff$

$$\iff 4v+\frac{3\pi}{8}=\pm\left(\frac{\pi}{2}-2v\right)+n2\pi \iff \begin{cases} 6v=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}+n2\pi \\ \text{eller} \\ 2v=-\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}+n2\pi \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} v=\frac{\pi}{48}+\frac{n\pi}{3} \\ \text{eller} \\ v=-\frac{7\pi}{16}+n\pi \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.}$$

Svar: $\begin{cases} v=\frac{\pi}{48}+\frac{n\pi}{3} \\ \text{eller} \\ v=-\frac{7\pi}{16}+n\pi \end{cases}$ där n är heltal.

(b) Eftersom $0<\frac{3}{\sqrt{17}}<1$ så är $0<\arcsin\frac{3}{\sqrt{17}}<\frac{\pi}{2}$, och därmed kan $\arcsin\frac{3}{\sqrt{17}}$ illustreras i en rätvinklig triangel med motstående katet $=3$, hypotenusa $=\sqrt{17}$ och närliggande katet $=\sqrt{(\sqrt{17})^2-3^2}=\sqrt{8}$ (**gör det!**). Alltså är $\tan\left(\arcsin\frac{3}{\sqrt{17}}\right)=\frac{3}{\sqrt{8}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Svar: $\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

(c) $7i-1= \Big/ |7i-1|=\sqrt{(-1)^2+7^2}=\sqrt{50} \Big/ =\sqrt{50}\left(-\frac{1}{\sqrt{50}}+\frac{7}{\sqrt{50}}i\right)=$

$=\sqrt{50}(\cos v+i\sin v)=\sqrt{50}e^{iv}$ där v är en vinkel som uppfyller $\begin{cases} \cos v=-\frac{1}{\sqrt{50}} \\ \sin v=\frac{7}{\sqrt{50}}. \end{cases}$

Den övre ekvationen har lösningarna $v=\pm\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{50}}\right)+n2\pi$ och av dessa uppfyller $v=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{50}}\right)+n2\pi$ den undre ekvationen. Ett argument för $7i-1$ är således $v=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{50}}\right)$, så $7i-1=\sqrt{50}e^{i\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{50}}\right)}$.

Svar: $\sqrt{50}e^{i\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{50}}\right)}$

4. $f(x)$ är definierad då $\begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}-5\neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\geq 0 \\ x\neq 25. \end{cases}$ För dessa x fås

$$y=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5} \iff y(\sqrt{x}-5)=\sqrt{x}+3 \iff \sqrt{x}(y-1)=5y+3 \iff$$

$\iff \sqrt{x}=\frac{5y+3}{y-1} \implies x=\left(\frac{5y+3}{y-1}\right)^2$ dvs ekvationen $y=f(x)$ har högst en lösning för varje y, vilket visar att f är injektiv och att $f^{-1}(y)=\left(\frac{5y+3}{y-1}\right)^2$.

Svar: $D_f=\{x : x\geq 0,\ x\neq 25\},\ f^{-1}(x)=\left(\frac{5x+3}{x-1}\right)^2$

5. $\sqrt{3}\cos 3x = 1+\sin 3x \iff \sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x = 1 \iff$

$$\iff \Big/ \text{bryt ut } \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = 2 \Big/ \iff 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 3x\right) \iff$$

$$\iff \Big/ \begin{cases} \sin v = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos v = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ har en lösning } v = \frac{2\pi}{3} \Big/ \iff$$

$$\iff 2\left(\sin\frac{2\pi}{3}\cos 3x + \cos\frac{2\pi}{3}\sin 3x\right) = 1 \iff 2\sin\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right) = 1 \iff$$

$$\iff \sin\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \iff \begin{cases} 3x+\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}+n2\pi \\ \text{eller} \\ 3x+\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6}+n2\pi \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{n2\pi}{3} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{\pi}{18}+\dfrac{n2\pi}{3} \end{cases} \text{ där } n \text{ är heltal.}$$

$$\text{Svar: } \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{n2\pi}{3} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{\pi}{18}+\dfrac{n2\pi}{3} \end{cases} \text{ där } n \text{ är heltal.}$$

6. Eftersom $\dfrac{\sqrt{3}}{7} > 0$ så är $0 < \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{7} < \dfrac{\pi}{2}$ och eftersom $-1 < -\dfrac{6}{\sqrt{39}} < 0$ så är $\dfrac{\pi}{2} < \arccos\left(-\dfrac{6}{\sqrt{39}}\right) < \pi$. Av detta följer att $-\pi < \alpha < 0$. Dessutom är $\tan\alpha =$

$$= \frac{\tan\left(\arctan\frac{\sqrt{3}}{7}\right) - \tan\left(\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{39}}\right)\right)}{1+\tan\left(\arctan\frac{\sqrt{3}}{7}\right)\cdot\tan\left(\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{39}}\right)\right)} =$$

$$= \Big/ \tan\left(\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{39}}\right)\right) = \frac{\sin\left(\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{39}}\right)\right)}{\cos\left(\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{39}}\right)\right)} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{39}}\right)\right)}}{\cos\left(\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{39}}\right)\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\frac{36}{39}}}{-\frac{6}{\sqrt{39}}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}, \text{ eftersom } \sin\left(\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{39}}\right)\right) > 0 \Big/ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{7}+\frac{\sqrt{3}}{6}}{1-\frac{\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

vilket ger $\alpha = \dfrac{\pi}{6}+\pi n$ för något heltal n.

Av dessa vinklar är det endast $\alpha = \dfrac{\pi}{6}-\pi = -\dfrac{5\pi}{6}$ som uppfyller villkoret $-\pi < \alpha < 0$, dvs $\alpha = -\dfrac{5\pi}{6}$.

Svar: $\alpha = -\dfrac{5\pi}{6}$.

7. Ett villkor för att vänstra uttrycket ska vara definierat är att $2e^x - a > 0$. För dessa x och a fås att $\dfrac{e^x - 2}{\sqrt{2e^x - a}} = 1 \iff e^x - 2 = \sqrt{2e^x - a}$. För att kunna få likhet måste $e^x - 2 > 0$ d.v.s. $x > \ln 2$. För x som uppfyller båda olikheterna ovan fås

   $\dfrac{e^x - 2}{\sqrt{2e^x - a}} = 1 \iff e^x - 2 = \sqrt{2e^x - a} \iff (e^x - 2)^2 = 2e^x - a.$

   Här ser vi att om $e^x > 2$ så blir $2e^x - a = (e^x - 2)^2 > 0$, dvs vi behöver bara kontrollera lösningarna mot villkoret $e^x > 2$ på slutet. Vidare får vi

   $(e^x - 2)^2 = 2e^x - a \iff (e^x)^2 - 6e^x + 4 + a = 0 \iff (e^x - 3)^2 + a - 5 = 0 \iff$
   $\iff (e^x - 3)^2 = 5 - a.$

   Av detta ser vi att

   - Om $a > 5$ så saknas lösning.
   - Om $a = 5$ så blir $e^x - 3 = 0 \iff x = \ln 3$, som uppfyller villkoret $e^x - 2 > 0$.
   - Om $a < 5$ så blir $e^x - 3 = \pm\sqrt{5 - a} \iff e^x = 3 \pm \sqrt{5 - a} \iff x = \ln(3 \pm \sqrt{5 - a})$, där $x = \ln(3 + \sqrt{5 - a})$ förstås uppfyller villkoret $e^x > 2$. För den andra kandidaten, $x = \ln(3 - \sqrt{5 - a})$, fås $e^x - 2 > 0 \iff 1 - \sqrt{5 - a} > 0 \iff \sqrt{5 - a} < 1$, vilket blir uppfyllt om $5 - a < 1 \iff a > 4$.

$$\text{Svar: } \begin{cases} x = \ln(3 + \sqrt{5 - a}), \text{ om } a \le 4 \\ x = \ln(3 \pm \sqrt{5 - a}), \text{ om } 4 < a < 5 \\ x = \ln 3, \text{ om } a = 5 \\ \text{lösning saknas om } a > 5. \end{cases}$$