Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN6

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2013–09–30 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter duggans slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Utveckla $(a-1)^7$. Binomialkoefficienter får inte förekomma i svaret. (1 p)

   (b) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=2}^{130} 6 \cdot 2^{2k}$. (1 p)

   (c) Beräkna $\operatorname{Re}\left(1 + i\dfrac{i+1}{2i-1}\right)$. (1 p)

2. (a) För vilka reella x gäller sambandet $2^{2x+2} - 2^{x+3} = 21$? (1 p)

   (b) Lös ekvationen $\ln(1-x) + \ln(x+6) + 2\ln\dfrac{1}{2} = 2\ln(-x) + \ln 6$. (2 p)

3. Bestäm definitionsmängden och (om möjligt) inversen till $f(x) = \sqrt{2 - e^{-x}}$.

4. (a) Finn alla lösningar till ekvationen $\sin\left(3t + \dfrac{\pi}{5}\right) = \sin 2t$ (1 p)

   (b) Beräkna $\cos(\arctan 2)$. (1 p)

   (c) Beräkna $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ om $\cos x = \dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 0$. (1 p)

5. (a) Definiera x^a för $x > 0$ och $a \in \mathbf{R}$. (1 p)

   (b) Vilka $z \in \mathbf{C}$ uppfyller $\left(z + 2^{1/4}\right)^4 = -2i$? (2 p)

6. Skriv $\alpha = \arctan 3 + \arccos\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ på enklast möjliga form.

7. Visa att ekvationen $z^5 + z = 1$ har minst en lösning som ligger utanför enhetscirkeln i det komplexa talplanet.

Dugga 2 i TATM79, 2013-09-30, lösningsförslag

1. (a) $(a-1)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} a^{7-k}(-1)^k = \binom{7}{0} a^7 \cdot (-1)^0 + \binom{7}{1} a^6 \cdot (-1)^1 + \binom{7}{2} a^5 \cdot (-1)^2 +$
$\binom{7}{3} a^4 \cdot (-1)^3 + \binom{7}{4} a^3 \cdot (-1)^4 + \binom{7}{5} a^2 \cdot (-1)^5 + \binom{7}{6} a \cdot (-1)^6 + \binom{7}{7} \cdot (-1)^7 =$
$= \Big/$binomialkoefficienterna hämtas enklast ur Pascals triangel$\Big/ =$
$= a^7 - 7a^6 + 21a^5 - 35a^4 + 35a^3 - 21a^2 + 7a - 1$

Svar: $a^7 - 7a^6 + 21a^5 - 35a^4 + 35a^3 - 21a^2 + 7a - 1$.

(b) $\sum_{k=2}^{130} 6 \cdot 2^{2k} = \sum_{k=2}^{130} 6 \cdot (2^2)^k = \sum_{k=2}^{130} 6 \cdot 4^k = 6 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4^3 + \cdots + 6 \cdot 4^{130}$.
Vi ser att detta är en geometrisk summa med första term $= 6 \cdot 4^2$, kvot $= 4$ och med $130-2+1 = 129$ termer. Alltså är summan lika med $6 \cdot 4^2 \cdot \dfrac{4^{129}-1}{4-1} = 32 \cdot (4^{129}-1)$.

Svar: $32 \cdot (4^{129} - 1)$.

(c) $1 + i\dfrac{i+1}{2i-1} = 1 + i\dfrac{(i+1)(-2i-1)}{(2i-1)(-2i-1)} = 1 + \dfrac{i(1-3i)}{5} = \dfrac{5+i+3}{5} = \dfrac{8}{5} + \dfrac{1}{5}i$, så
$\operatorname{Re}\left(1 + i\dfrac{i+1}{2i-1}\right) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{8+i}{5}\right) = \dfrac{8}{5}$.

Svar: $\dfrac{8}{5}$.

2. (a) $2^{2x+2} - 2^{x+3} = 21 \iff 2^2 \cdot 2^{2x} - 2^3 \cdot 2^x = 21 \iff 4 \cdot (2^x)^2 - 8 \cdot 2^x = 21 \iff$
$\iff \Big/$sätt $t = 2^x > 0\Big/ \iff \begin{cases} 4t^2 - 8t - 21 = 0 \\ t > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t^2 - 2t - \dfrac{21}{4} = 0 \\ t > 0 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} t = 1 \pm \sqrt{1 + \dfrac{21}{4}} \\ t > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \pm \dfrac{5}{2} \\ t > 0 \end{cases} \iff t = \dfrac{7}{2} \iff 2^x = \dfrac{7}{2} \iff$
$\iff \Big/$ln är injektiv$\Big/ \iff \ln 2^x = \ln \dfrac{7}{2} \iff x \ln 2 = \ln 7 - \ln 2 \iff$
$\iff x = \dfrac{\ln 7 - \ln 2}{\ln 2} = \dfrac{\ln 7}{\ln 2} - 1$

Svar: $x = \dfrac{\ln 7}{\ln 2} - 1$.

(b) Logaritmerna är definierade förutsatt att $1 - x > 0$, $x + 6 > 0$ och $-x > 0$, dvs då $-6 < x < 0$. För dessa x fås
$\ln(1-x) + \ln(x+6) + 2\ln\dfrac{1}{2} = 2\ln(-x) + \ln 6 \iff$
$\iff \ln(1-x) + \ln(x+6) + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \ln(-x)^2 + \ln 6 \iff$
$\iff \ln\dfrac{(1-x)(x+6)}{4} = \ln(6 \cdot x^2) \iff \Big/$ln är injektiv$\Big/ \iff$
$\iff \dfrac{(1-x)(x+6)}{4} = 6x^2 \iff 25x^2 + 5x - 6 = 0 \iff x = -\dfrac{1}{10} \pm \dfrac{5}{10} \iff$
$\iff x = -\dfrac{3}{5}$ eller $x = \dfrac{2}{5}$, men eftersom $-6 < x < 0$ så följer att enda lösningen är $x = -\dfrac{3}{5}$.

Svar: $x = -\dfrac{3}{5}$.

3. $f(x)$ är definierad då $2-e^{-x}\geq 0 \iff e^{-x}\leq 2 \iff \Big/ \text{ln är injektiv} \Big/ \iff$

$\iff -x\leq \ln 2 \iff x\geq -\ln 2$. För dessa x fås att $y=\sqrt{2-e^{-x}} \implies$
$\implies y^2=2-e^{-x} \iff e^{-x}=2-y^2 \iff -x=\ln\left(2-y^2\right) \iff x=-\ln\left(2-y^2\right)$
dvs ekvationen $y=f(x)$ har högst en lösning för varje y vilket visar att f är injektiv och att $f^{-1}(y)=-\ln\left(2-y^2\right)$.

Svar: $D_f=\{x: x\geq -\ln 2\},\ f^{-1}(x)=-\ln\left(2-x^2\right)$.

4. (a) $$\sin\left(3t+\frac{\pi}{5}\right)=\sin 2t \iff \begin{cases} 3t+\dfrac{\pi}{5}=2t+n2\pi \\ \text{eller} \\ 3t+\dfrac{\pi}{5}=\pi-2t+n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} t=-\dfrac{\pi}{5}+n2\pi \\ \text{eller} \\ 5t=\dfrac{4\pi}{5}+n2\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=-\dfrac{\pi}{5}+n2\pi \\ \text{eller} \\ t=\dfrac{4\pi}{25}+\dfrac{n2\pi}{5} \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.} \qquad \text{Svar: } \begin{cases} t=-\dfrac{\pi}{5}+n2\pi \\ \text{eller} \\ t=\dfrac{4\pi}{25}+\dfrac{n2\pi}{5} \end{cases},\ n \text{ heltal.}$$

(b) Eftersom $2>0$ så är $0<\arctan 2<\dfrac{\pi}{2}$, och därmed kan $\arctan 2$ illustreras i en rätvinklig triangel med motstående katet $=2$, närliggande katet $=1$ och hypotenusa $=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ (**gör det!**). Alltså är $\cos(\arctan 2)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Svar: $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

(c) Eftersom $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ och $\sin x\leq 0$ (eftersom $-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq 0$) så följer att $\sin x=-\sqrt{1-\cos^2 x}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{8}}{3}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Av detta fås att
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{2\sqrt{6}+1}{6}.$$

Svar: $-\dfrac{2\sqrt{6}+1}{6}$.

5. (a) $x^a=e^{a\ln x}$ då $x>0$ och $a\in \mathrm{R}$.

Svar: $x^a=e^{a\ln x}$.

(b) Låt $w=z+2^{1/4}$ så fås ekvationen $w^4=-2i$. Skriv talen på på polär form. Med $w=re^{iv}$, där $r\geq 0$ och v är reellt, och $-2i=2e^{-i\pi/2}$ fås
$$w^4=-2i \iff \left(re^{iv}\right)^4=2e^{-i\pi/2} \iff r^4e^{i4v}=2e^{-i\pi/2} \iff \begin{cases} r^4=2,\ r\geq 0 \\ 4v=-\dfrac{\pi}{2}+n2\pi \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} r=2^{1/4} \\ v=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{n\pi}{2} \end{cases}$$ dvs $w=2^{1/4}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)}$, där n är heltal och $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$ ger de fyra olika rötterna till fjärdegradsekvationen.

Slutligen fås att $z=w-2^{1/4}=2^{1/4}\left(e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)}-1\right)$ där $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Svar: $z=2^{1/4}\left(e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)}-1\right),\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3.$

6. Eftersom $3>0$ och $-1<-\dfrac{2}{\sqrt{5}}<0$ är $0<\arctan 3<\dfrac{\pi}{2}$ och $\dfrac{\pi}{2}<\arccos\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)<\pi$ dvs $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$. Dessutom är $\tan\alpha=\dfrac{\tan(\arctan 3)+\tan\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}{1-\tan(\arctan 3)\cdot\tan\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}=$

$$=\Big/\tan\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)=\frac{\sin\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}{\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}}{\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}=$$

$=\dfrac{\sqrt{1-\frac{4}{5}}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}}=-\dfrac{1}{2}$, eftersom $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)>0\Big/=\dfrac{3-\frac{1}{2}}{1-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=1$, vilket ger $\alpha=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$ för något heltal n. Av dessa vinklar är det endast $\alpha=\dfrac{\pi}{4}+\pi=\dfrac{5\pi}{4}$ som uppfyller villkoret $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, dvs $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$.

$\Big($*Alternativ:* $\arctan 3$ *är ett argument till talet* $z=1+3i$ *och* $\arccos\left(-2/\sqrt{5}\right)$ *är ett argument till talet* $w=-2+i$. *Alltså är* $(1+3i)(-2+i)=\sqrt{10}e^{i\arctan 3}\cdot\sqrt{5}e^{i\arccos(-2/\sqrt{5})}=$

$=\sqrt{50}\,e^{i\left(\arctan 3+\arccos(-2/\sqrt{5})\right)}$. *Men* $(1+3i)(-2+i)=-5-5i=\sqrt{50}e^{i5\pi/4}$, *så* $\arctan 3+\arccos\left(-2/\sqrt{5}\right)=5\pi/4+n2\pi$ *för något heltal* n. *Av alla dessa är det endast* $5\pi/4$ *som ligger i intervallet* $\pi/2<\alpha<3\pi/2$.$\Big)$

Svar: $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$.

7. $z^5+z=1 \iff z^5+z-1=0$. Femtegradsekvationen har fem lösningar, om man räknar lösningarna med deras multiplicitet. Av dessa är exakt en lösning reell, ty:

- Polynomet $P(z)=z^5+z-1$ har reella koefficienter, så om $P(z)=0$ för något icke-reellt tal z så är även $P(\bar{z})=0$. Av detta följer att det måste finnas minst ett reellt nollställe (ty det finns ett jämnt antal icke-reella nollställen, med multiplicitet räknad).
- Tittar vi på reella z ser vi att $P(z)=z^5+z-1$ är strängt växande, så $P(z)=0$ har högst en reell lösning.

Eftersom $P(0)=-1<0$, $P(1)=1>0$, $P(z)$ är strängt växande och $P(z)=0$ har exakt en lösning, följer att det reella nollstället z_1 uppfyller $0<z_1<1$.

Låt de övriga nollställena vara z_2, z_3, z_4 och z_5 (där $z_2=\bar{z_3}$ och $z_4=\bar{z_5}$). Då kan polynomet faktoriseras: $P(z)=z^5+z-1=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)$ och med $z=0$ fås att $z_1z_2z_3z_4z_5=1$. Således är $|z_1z_2z_3z_4z_5|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|\cdot|z_4|\cdot|z_5|=1$ så $|z_2|\cdot|z_3|\cdot|z_4|\cdot|z_5|=\dfrac{1}{|z_1|}>1$. Men om $|z_k|\le 1$ för $k=2,3,4,5$ så blir $|z_2|\cdot|z_3|\cdot|z_4|\cdot|z_5|\le 1$, vilket ger en motsägelse. Alltså måste minst en av $|z_k|>1$, dvs minst en lösning (minst två, eftersom konjugatet också är en lösning) ligger utanför enhetscirkeln, v.s.v.

$\Big($*Alternativ: Antag motsatsen, dvs att alla* z_k *uppfyller* $|z_k|\le 1,\ k=1,2,3,4,5$. *Men* $z_1z_2z_3z_4z_5=1$, *så då följer att* $|z_k|=1,\ k=1,2,3,4,5$. *Eftersom ekvationen har minst en reell lösning, måste därmed* $z=1$ *eller* $z=-1$ *vara en lösning. Men kontroll visar att* $P(1)=1\neq 0$ *och* $P(-1)=-3\neq 0$. *Alltså får vi en motsägelse. Alltså måste minst en av* z_k *uppfylla* $|z_k|>1$, v.s.v.$\Big)$