

# Lösningförslag TATM79 2019-01-09

1. (a) Vi sorterar termerna och faktorerar:

$$x^3 + x^2 > 2x \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) > 0 \Leftrightarrow x(x+2)(x-1) > 0$$

En teckentabell:

	-2	0	1	
$x+2$	-	0	+	+
$x$	-	-	0	+
$x-1$	-	-	-	0
$x(x+2)(x-1)$	-	0	+	0

Vi ser i tabellen att uttrycket är positivt precis då  $-2 < x < 0$  eller  $x > 1$ .

- (b) Genom att skriva om nämnare och täljare i bråket på lämplig polär form så ser vi att

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2i-2}\right)^{12} &= \left(\frac{\sqrt{4}e^{-i\pi/3}}{\sqrt{8}e^{i3\pi/4}}\right)^{12} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\pi/3+3\pi/4)}\right)^{12} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\pi/3+3\pi/4)}\right)^{12} = \frac{1}{64}e^{-i13\pi} = -\frac{1}{64}. \end{aligned}$$

- (c) Enligt binomialsatsen så gäller att

$$(1+x)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 1^{5-k} x^k = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^k,$$

så med  $x=1$  erhåller vi att

$$\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} = 2^5 = 32.$$

Man kan givetvis direkt räkna ut de 6 termerna i summan också (Pascals triangel).

**Svar:** (a)  $-2 < x < 0$  eller  $x > 1$       (b)  $-\frac{1}{64}$       (b) 32.

2. Låt  $t = e^x > 0$ . För  $t > 0$  så är

$$e^x + e^{2x} = e^{3x} \Leftrightarrow 1+t = t^2 \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Alltså ges den enda lösningen av  $x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$  eftersom  $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ .

Vidare gäller att

$$\begin{aligned} \ln(e+e^x) = 1+x &\Leftrightarrow e+e^x = e \cdot e^x \Leftrightarrow e^x(e-1) = e \\ &\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{e}{e-1}\right) = 1 - \ln(e-1). \end{aligned}$$

**Svar:**  $x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$  respektive  $x = 1 - \ln(e-1)$ .

3. (a)

$$\begin{aligned} \sin(2x) = \sin(4 - 4x) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 - 4x + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \\ \text{eller} \\ 2x = \pi - (4 - 4x) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 4 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \\ \text{eller} \\ -2x = \pi - 4 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 + \pi n}{3}, n \in \mathbf{Z} \\ \text{eller} \\ x = 2 - \frac{(2n + 1)\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

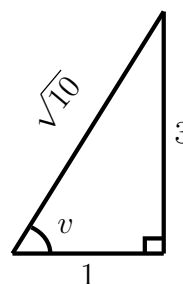
(b)

$$D_{\sin} = \mathbf{R} \text{ och } V_{\sin} = [-1, 1] \text{ samt } D_{\arcsin} = [-1, 1] \text{ och } V_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(c)

Låt  $v = \arctan 3$ . Då gäller att  $0 < v < \pi/2$ , så vi ser direkt ur en hjälptriangel att

$$\cos v = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$



**Svar:** (a)  $x = \frac{2 + \pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$  eller  $x = 2 - \frac{(2n + 1)\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$  (b) se ovan (c)  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ .

4. Vi ser att

$$\sin^2 3x \cos 2x = \left(\frac{1 - \cos 6x}{2}\right) \cos 2x = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 6x \cdot \cos 2x.$$

En Euler-omskrivning visar att

$$\begin{aligned} \cos 6x \cdot \cos 2x &= \left(\frac{e^{i6x} + e^{-i6x}}{2}\right) \left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} (e^{i8x} + e^{i4x} + e^{-i4x} + e^{-i8x}) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 4x), \end{aligned}$$

så

$$\sin^2 3x \cos 2x = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} (\cos 8x + \cos 4x).$$

Man kan förstås använda Eulers formler direkt på ursprungsuttrycket också. Ekvationen i fråga kan nu skrivas som

$$\begin{aligned} 4 \sin^2 3x \cos 2x + \cos 8x + \cos 4x &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \cos 2x &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x = \pm \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2\pi n \\ \Leftrightarrow x &= \pm \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + \pi n, \text{ där } n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

**Svar:** (a)  $\pm \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + \pi n, n \in \mathbf{Z}$ .

5. (a) Enligt regler för exponentialfunktionen så gäller att

$$e^{i\pi/5+\pi/7} = e^{i\pi/5}e^{\pi/7}.$$

Då  $e^{ix}$  är ett tal på enhetscirkeln för alla  $x \in \mathbf{R}$  så blir då

$$|e^{i\pi/5+\pi/7}| = |e^{i\pi/5}||e^{\pi/7}| = e^{\pi/7} > 1,$$

då  $\exp$  är strängt växande,  $\pi/7 > 0$  och  $e^0 = 1$ .

(b) Vi söker de  $z \in \mathbf{C}$  så att

$$z^5 = -32.$$

Det komplexa talet  $-32$  kan till exempel skrivas

$$-32 = 2^5 e^{i\pi}.$$

Låt nu  $z = re^{i\varphi}$ , där  $r \geq 0$  och  $\varphi \in \mathbf{R}$ . Då måste

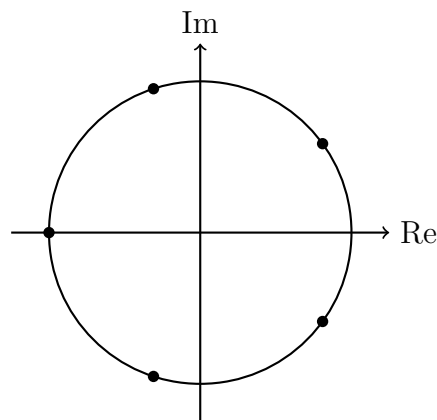
$$z^5 = r^5 e^{i5\varphi} = 2^5 e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = 2^5, r \geq 0, \\ 5\varphi = \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (1)$$

Detta visar att  $r = 2$  och  $\varphi = \frac{\pi}{5} + \frac{2n\pi}{5} = \frac{(2n+1)\pi}{5}, n \in \mathbf{Z}$ .

Våra lösningar blir nu

$$z = 2 e^{i\frac{(2n+1)\pi}{5}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när  $n = 5$  får vi samma lösning som när  $n = 0$  etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha  $n \in \mathbf{Z}$  godtycklig.



**Svar:** (a) se ovan. (b)  $z = 2 e^{i\frac{(2n+1)\pi}{5}}, n = 0, 1, 2, 3, 4$ .

6. Eftersom vi har en geometrisk summa så kommer summan att ha utseendet

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n,$$

där  $a$  och  $q$  är reella tal. I uppgiften är givet att

$$a + aq^3 = 14 \quad \text{och} \quad a + aq + aq^2 + aq^3 = 10.$$

Alltså måste  $a(1 + q^3) = 14$  och, om  $q \neq 1$ ,

$$10 = a(1 + q + q^2 + q^3) = a \frac{q^4 - 1}{q - 1} = a \frac{(q^2 - 1)(q^2 + 1)}{q - 1} = a(q + 1)(q^2 + 1),$$

där vi utnyttjade formeln för en geometrisk summa samt faktorerade

$$q^4 - 1 = (q^2 - 1)(q^2 + 1).$$

Vidare gäller att, såvida  $q \neq -1$ ,

$$a(1 + q^3) = 14 \Leftrightarrow a = \frac{14}{1 + q^3},$$

så

$$10 = \frac{14}{1 + q^3}(q + 1)(q^2 + 1) = \frac{14(q^2 + 1)(q + 1)}{(1 + q)(q^2 - q + 1)} = 14 \frac{q^2 + 1}{q^2 - q + 1},$$

vilket ger att

$$10(q^2 - q + 1) = 14(q^2 + 1) \Leftrightarrow q = -2 \text{ eller } q = -\frac{1}{2}.$$

Om  $q = -2$  blir  $a = 14/(1 + q^3) = -2$  och om  $q = -1/2$  så blir

$$a = \frac{14}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3} = 16.$$

Fallet  $q = -1$  skulle ge  $a - a + a - a = 0 \neq 10$  och fallet  $q = 1$  ger att  $2a = 14$  samt  $4a = 10$ , så dessa värden på  $q$  kan ej ge en lösning. Den femte termen kan således anta värdena

$$aq^4 = -2 \cdot (-2)^4 = -32$$

eller

$$aq^4 = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 1.$$

**Svar:** (a)  $-32$  eller  $1$ .

7. Vi börjar med att reda ut en definitionsmängd  $D_f$  där  $-2 \in D_f$ ,  $D_f = I$  är ett intervall och  $V_f = [0, 1]$ . Polynomt kan kvadratkompletteras enligt

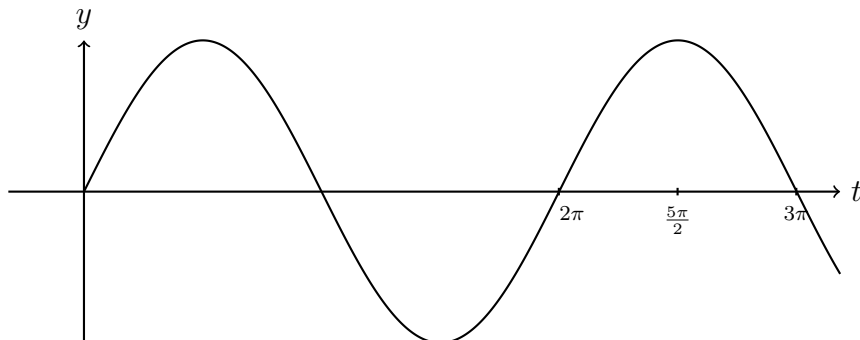
$$x^2 - 4x - 3 = (x - 2)^2 - 7.$$

Vi ser att

$$(-2 - 2)^2 - 7 = 9 < 3\pi.$$

Alltså är det nödvändigt att  $2\pi \leq x^2 - 4x - 3 \leq 3\pi$  för att kvadratroten skall vara definierad (annars får vi med värden på  $x$  som gör att sin blir negativ). Men detta krav är inte tillräckligt för att funktionen ska vara inverterbar. Genom kvadratkompletteringen ovan ser vi att vi har en minpunkt då  $x = 2$ , så polynomt  $x^2 - 4x - 3$  är strängt avtagande för  $x \leq 2$  och strängt växande för  $x \geq 2$ .

Om vi betraktar  $y = \sin t$  så ser vi följande.



Då  $\frac{5\pi}{2} < \frac{5 \cdot 3.2}{2} < 8 < 9$  så är det tydligt att  $\frac{5\pi}{2} \leq x^2 - 4x - 3$  är nödvändigt för att kunna invertera  $y = f(x)$  (med kravet att  $-2 \in D_f$ ). Vi löser de olikheter vi fått fram:

$$\frac{5\pi}{2} \leq x^2 - 4x - 3 \Leftrightarrow 0 \leq (x-2)^2 - 7 - \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow |x-2| \geq \sqrt{7 + \frac{5\pi}{2}}$$

samt

$$x^2 - 4x - 3 \leq 3\pi \Leftrightarrow (x-2)^2 - 7 - 3\pi \leq 0 \Leftrightarrow |x-2| \leq \sqrt{7 + 3\pi}.$$

Med kravet att intervallet ska innehålla  $-2$  så gäller dessa två olikheter precis då

$$2 - \sqrt{7 + 3\pi} \leq x \leq 2 - \sqrt{7 + \frac{5\pi}{2}}, \quad (2)$$

Beteckna detta intervall som  $I$ . I detta intervall är även  $x^2 - 4x - 3$  strängt avtagande, så funktionen kommer att gå att invertera (eftersom det är en sammansättning av två injektiva funktioner på  $I$ ). Vidare är det tydligt att  $V_f = [0, 1]$  om  $D_f = I$ .

Så hur ser då inversen ut? För  $x \in D_f = I$  gäller att

$$\begin{aligned} y = \sqrt{\sin(x^2 - 4x - 3)} &\Rightarrow y^2 = \sin(x^2 - 4x - 3) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin(y^2) + 2n\pi = x^2 - 4x - 3, n \in \mathbf{Z} \\ \text{eller} \\ \pi - \arcsin(y^2) + 2n\pi = x^2 - 4x - 3, n \in \mathbf{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = \arcsin(y^2) + 2n\pi + 7, n \in \mathbf{Z} \\ \text{eller} \\ (x-2)^2 = \pi - \arcsin(y^2) + 2n\pi + 7, n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Genom att titta på mellanledet i ekvivalenskedjan så ser vi att endast fallet

$$\pi - \arcsin(y^2) + 2n\pi = x^2 - 4x - 3$$

är möjligt med  $n = 1$ . Detta eftersom  $0 \leq \arcsin(y^2) \leq \frac{\pi}{2}$  och  $\frac{5\pi}{2} \leq x^2 - 4x - 3 \leq 3\pi$ . Om vi löser ut  $x$  ser vi att

$$x = 2 - \sqrt{3\pi - \arcsin(y^2) + 7},$$

där vi valde den lösningen eftersom vi vet att (2) måste gälla. Vi finner således högst en lösning för varje  $y$ , vilket innebär att  $f^{-1}(y) = 2 - \sqrt{3\pi - \arcsin(y^2) + 7}$ .

**Svar:**  $D_f = \left[2 - \sqrt{7 + 3\pi}, 2 - \sqrt{7 + \frac{5\pi}{2}}\right]$  samt  $f^{-1}(y) = 2 - \sqrt{3\pi - \arcsin(y^2) + 7}$ .