

(b) Vi förenklar enligt

$$\left| e^{2i} \left(2i + \frac{1}{1+i} \right) \right| = |e^{2i}| \left| \frac{2i(1+i) + 1}{1+i} \right| = \frac{|2i-1|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

Svar: (a) 27^3 respektive $\frac{3^{28} - 3^{-26}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

3. (a) Låt $t = 3^x$. Då gäller att

$$\begin{aligned} 6 \cdot 3^{3x-1} + 5 \cdot 9^x = 3^{x+1} &\Leftrightarrow 2t^3 + 5t^2 = 3t \Leftrightarrow 2t^3 + 5t^2 - 3t = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = t \left(t^2 + \frac{5}{2}t - \frac{3}{2} \right) = t \left(\left(t + \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{49}{16} \right) \\ &\Leftrightarrow 0 = t \left(t - \frac{1}{2} \right) (t + 3), \end{aligned}$$

så $t = 0$, -3 , $\frac{1}{2}$ är nollställena. Endast

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

ger en lösning, eftersom $t = 3^x > 0$ för alla reella x .

(b) För att ekvationen ska vara definierad måste $\ln x \geq 0$ och $x > 0$, så $x \geq 1$ är nödvändigt. Om $x \geq 1$ gäller att

$$\begin{aligned} \sqrt{\ln x} = \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x &\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{4} (\ln x)^2 \Leftrightarrow \ln x \cdot \left(\frac{1}{4} \ln x - 1 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ eller } \ln x = 4 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ eller } x = e^4, \end{aligned}$$

där första ekvivalensen följer av att $\frac{1}{2} \ln x \geq 0$ för $x \geq 1$.

Svar: (a) $x = -\frac{\ln 2}{\ln 3}$ (b) $x = 1$ eller $x = e^4$.

4. (a) Vi ser att

$$\sin^2 3x \cos 5x = \left(\frac{1 - \cos 6x}{2} \right) \cos 5x = \frac{1}{2} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos 6x \cdot \cos 5x.$$

En Euler-omskrivning visar att

$$\begin{aligned} \cos 6x \cdot \cos 5x &= \left(\frac{e^{i6x} + e^{-i6x}}{2} \right) \left(\frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (e^{i11x} + e^{ix} + e^{-ix} + e^{-i11x}) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 11x + \cos x), \end{aligned}$$

så

$$\sin^2 3x \cos 5x = \frac{1}{2} \cos 5x - \frac{1}{4} (\cos 11x + \cos x).$$

Man kan förstås använda Eulers formler direkt på ursprungsuttrycket också.

(b) Eftersom

$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right)} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

med positivt tecken ty $0 \leq \arccos t \leq \pi$, så följer det att

$$\tan\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{7}/4}{-3/4} = -\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Svar: (a) $\frac{1}{2} \cos 5x - \frac{1}{4} (\cos 11x + \cos x)$ (b) $-\frac{\sqrt{7}}{3}$.

5. Vi söker de $z \in \mathbf{C}$ så att

$$z^7 = 7 - 7i.$$

Det komplexa talet $7 - 7i$ ligger i fjärde kvadranten och kan skrivas

$$7 - 7i = \sqrt{98}e^{-i\pi/4} = 7\sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

Låt nu $z = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$ och $\varphi \in \mathbf{R}$. Då måste

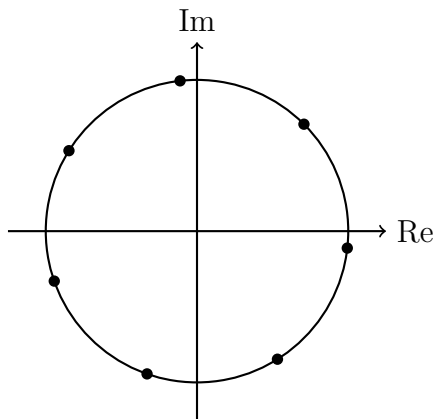
$$z^7 = r^7 e^{i7\varphi} = 7\sqrt{2}e^{-i\pi/4} \Leftrightarrow \begin{cases} r^7 = 7\sqrt{2}, r \geq 0, \\ 7\varphi = -\pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (1)$$

Detta visar att $r = (7\sqrt{2})^{1/7}$ och $\varphi = -\frac{\pi}{28} + \frac{2n\pi}{7}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Våra lösningar blir nu

$$z = (7\sqrt{2})^{1/7} e^{i\left(-\frac{\pi}{28} + \frac{2n\pi}{7}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 7$ får vi samma lösning som när $n = 0$ etc). Observera dock att för ekvivalensen i ekvation (1) **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig.



Svar: $z = (7\sqrt{2})^{1/7} e^{i\left(-\frac{\pi}{28} + \frac{2n\pi}{7}\right)}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

6. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. För att $\arccos \frac{x-1}{x}$ ska vara definierad måste

$$-1 \leq \frac{x-1}{x} \leq 1.$$

Vidare måste

$$2\pi - 3 \arccos\left(\frac{x-1}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} \geq \arccos\left(\frac{x-1}{x}\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{x}.$$

Således måste

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{x} \leq 1$$

gälla. Vi ser direkt att

$$\frac{x-1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Den andra olikheten kan skrivas om enligt

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{2}x-1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x} \geq 0$$

så vi ställer upp en teckentabell.

	0	$\frac{2}{3}$		
x	-	0	+	+
$3x-2$	-		-	0
$\frac{3x-2}{x}$	+	0	-	0
			+	+

Alltså måste $x < 0$ eller $x \geq 2/3$. Men vi såg ovan att $x > 0$ är nödvändigt, så definitionsmängden D_f ges således av $x \geq \frac{2}{3}$. För $x \in D_f$ gäller att

$$\begin{aligned} y = \sqrt{2\pi - 3 \arccos\left(\frac{x-1}{x}\right)} &\Rightarrow y^2 = 2\pi - 3 \arccos\left(\frac{x-1}{x}\right) \\ &\Leftrightarrow \arccos\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{2\pi - y^2}{3} \\ &\Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = \cos\left(\frac{2\pi - y^2}{3}\right). \end{aligned}$$

Vi löser ut x ur den sista likheten och ser att

$$x = \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{2\pi - y^2}{3}\right)}.$$

Vi finner högst en lösning för varje y , vilket innebär att $f^{-1}(y) = \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{2\pi - y^2}{3}\right)}$.

Svar: $D_f = \left[\frac{2}{3}, \infty\right]$ samt $f^{-1}(y) = \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi - y^2}{3}\right)\right)^{-1}$.

7. Additionsformeln för tangens visar att

$$\begin{aligned} \tan\left(\arctan\left(\frac{b+c}{a}\right) + \arctan\left(\frac{a+c}{b}\right)\right) &= \frac{\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b}}{1 - \frac{b+c}{a} \frac{a+c}{b}} = \frac{(b+c)b + (a+c)a}{ab - (b+c)(a+c)} \\ &= -\frac{a^2 + b^2 + bc + ac}{bc + ac + c^2} = -\frac{c^2 + bc + ac}{bc + ac + c^2} = -1, \end{aligned}$$

där vi utnyttjat att $a^2 + b^2 = c^2$ eftersom talen är längderna på sidorna i en rätvinklig triangel. Vi vet att

$$\tan v = -1 \Leftrightarrow v = -\frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z},$$

vilket innebär att

$$\arctan\left(\frac{b+c}{a}\right) + \arctan\left(\frac{a+c}{b}\right) = -\frac{\pi}{4} + n\pi$$

för något tal $n \in \mathbf{Z}$. Då $a, b, c > 0$ är $(b+c)/a > 0$ och $(a+c)/b > 0$ vilket ger att

$$0 < \arctan\left(\frac{b+c}{a}\right) < \frac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad 0 < \arctan\left(\frac{a+c}{b}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

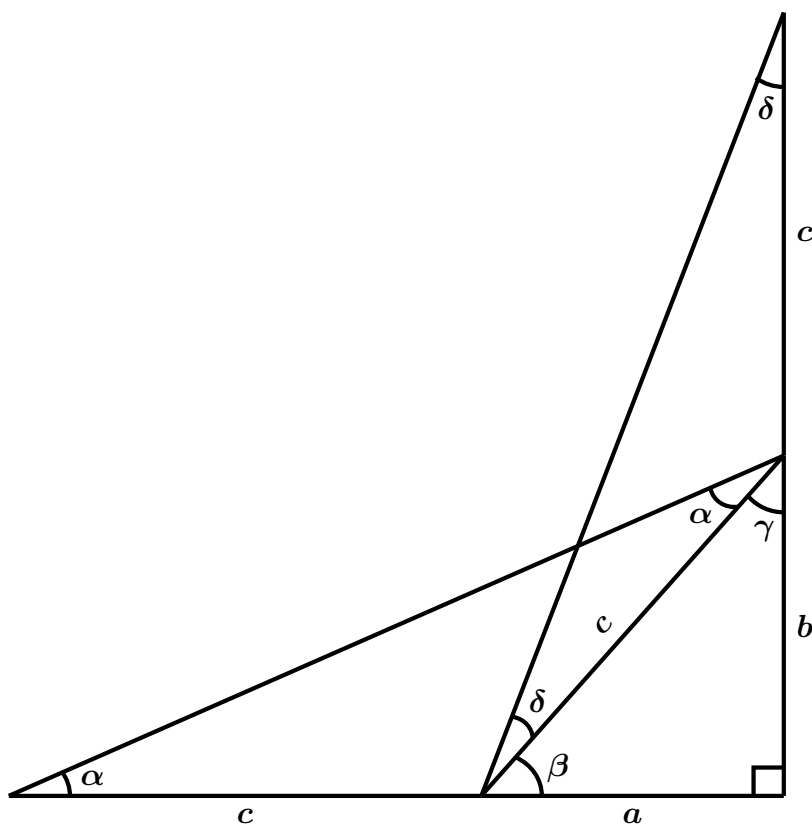
Adderar vi dessa olikheter fås

$$0 < \arctan\left(\frac{b+c}{a}\right) + \arctan\left(\frac{a+c}{b}\right) < \pi,$$

vilket gör att $n = 1$ är enda möjligheten. Alltså har vi visat att

$$\arctan\left(\frac{b+c}{a}\right) + \arctan\left(\frac{a+c}{b}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Alternativ 2. Vi kan även finna detta resultat helt geometriskt. Betrakta figuren nedan där vi skapar två likbenta trianglar.



Det följer ur denna figur att

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + \pi - \beta = \pi & \Leftrightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}, \\ \delta + \delta + \pi - \gamma = \pi & \Leftrightarrow \delta = \frac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

Vidare måste

$$\alpha + \gamma = \arctan\left(\frac{a+c}{b}\right) \quad \text{och} \quad \delta + \beta = \arctan\left(\frac{b+c}{a}\right),$$

så

$$\arctan\left(\frac{a+c}{b}\right) + \arctan\left(\frac{b+c}{a}\right) = \alpha + \delta + \gamma + \beta = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4},$$

ty $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Svar: $\arctan\left(\frac{b+c}{a}\right) + \arctan\left(\frac{a+c}{b}\right) = \frac{3\pi}{4}$.