Lösningsförslag TATM79 2017-01-03

1. (a) Kvadratkomplettering av uttrycket visar att

$$5x - 3 - 10x^2 = -10\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{10}\right) = -10\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{19}{80}\right)$$
$$= -\frac{19}{8} - 10\left(x - \frac{1}{4}\right)^2,$$

så största värdet blir $-\frac{19}{8}$ (vilket erhålls då $x = \frac{1}{4}$).

(b) Summan är geometrisk med kvoten 7^3 och 104 termer. Således blir

$$\sum_{k=-2}^{101} 7^{3k} = \left(7^3\right)^{-2} \sum_{k=0}^{103} \left(7^3\right)^k = \frac{1}{7^6} \frac{\left(7^3\right)^{104} - 1}{7^3 - 1} = \frac{7^{312} - 1}{7^9 - 7^6}.$$

(c) Summanden visar symmetri och vinklarna $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ för $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ligger jämnt fördelade på enhetscirkeln så att sinusvärdena har parvis motsatt tecken ($\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, ...). Därför måste

$$\sum_{k=0}^{5} \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Således blir

$$\sum_{k=0}^{7} \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right) = 0 + \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Svar: (a) $-\frac{19}{8}$ (b) $\frac{7^{312} - 1}{7^9 - 7^6}$ (c) $\frac{3}{2}$.

2. (a) Direkt ur enhetscirkeln ser vi att

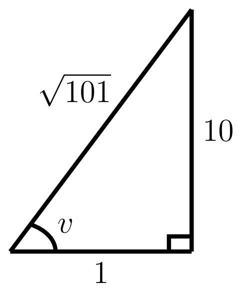
$$\cos(3x + 1) = \cos 7x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x + 1 = 7x + 2\pi n \\ \qquad \text{eller} \\ 3x + 1 = -7x + 2\pi n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4} - \frac{\pi n}{2} \\ \text{eller} \\ x = -\frac{1}{10} + \frac{\pi n}{5}, \end{cases}$$

där $n \in \mathbf{Z}$.

(b)

Låt $v = \arctan 10$. Vi börjar med att konstatera att $0 < v < \frac{\pi}{2}$. Eftersom vinkeln v ligger i första kvadranten, så kan vi direkt ur en hjälptriangel erhålla att

$$\cos v = \cos(\arctan 10) = \frac{1}{\sqrt{101}}.$$



(c) Vi "nystar" upp vinkeln och utnyttjar att sinus är periodisk $\sin(t+2\pi k) = \sin t$, $k \in \mathbf{Z}$, samt spegelsymmetrisk $\sin(\pi - t) = \sin t$:

$$\begin{aligned}\arcsin\left(\sin\frac{47\pi}{7}\right) &= \arcsin\left(\sin\left(6\pi + \frac{5\pi}{7}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{5\pi}{7}\right)\right)\\ &= \arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{7}\right) = \frac{2\pi}{7}\end{aligned}$$

eftersom $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{2\pi}{7} < \dfrac{\pi}{2}$.

Svar: (a) $\dfrac{1}{4} - \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $-\dfrac{1}{10} + \dfrac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{101}}$ (c) $\dfrac{2\pi}{7}$.

3. För att logaritmerna ska vara definierade krävs att $7 - x > 0$ och $(x-1)(x-3) > 0$. Det sista villkoret kan vi se är uppfyllt precis då $x < 1$ eller då $x > 3$ till exempel genom följande teckentabell.

		1		3	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Om något av dessa villkor är uppfyllda ($x < 7$ samt $x < 1$ eller $x > 3$) gäller att

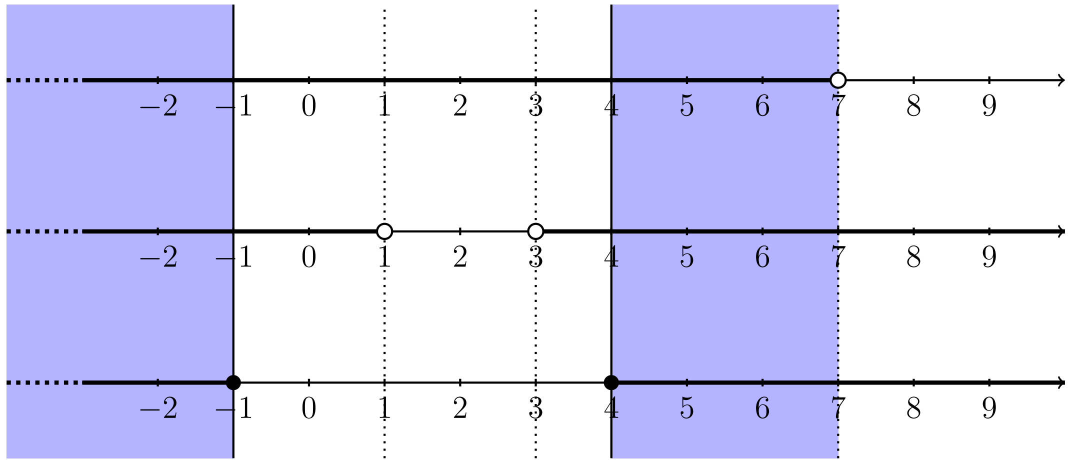
$$\begin{aligned}\ln(7-x) \le \ln((x-1)(x-3)) \quad &\Leftrightarrow \quad 7 - x \le (x-1)(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 4 \ge 0\\ &\Leftrightarrow \quad (x+1)(x-4) \ge 0,\end{aligned}$$

där vi utnyttjat att ln är strängt växande. En teckentabell visar när $(x+1)(x-4) \ge 0$,

		-1		4	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+1)(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

det vill säga precis när $x \le -1$ eller $x \ge 4$.

Vi skissar de tre kraven på tallinjer för att se när alla tre är uppfyllda.



Vi ser här att endera måste $x \leq -1$ eller $4 \leq x < 7$.

Svar: $x \leq -1$ eller $4 \leq x < 7$.

4. Genom att tillämpa additionsformeln för sinus ser vi att

$$C\sin(t+\alpha) = C\left(\sin t\cos\alpha + \cos t\sin\alpha\right).$$

Alltså söker vi C och α så att

$$C\left(\sin t\cos\alpha + \cos t\sin\alpha\right) = -2\sin t + 2\cos t.$$

Genom att, till exempel, sätta $t = \frac{\pi}{2}$ och $t = 0$, erhåller vi att

$$\begin{cases} C\cos\alpha = -2, \\ C\sin\alpha = 2. \end{cases} \tag{$*$}$$

Genom att kvadrera och addera ekvationerna ser vi att

$$C^2\cos^2\alpha + C^2\sin^2\alpha = (-2)^2 + 2^2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad C^2 = 8.$$

Vi söker *ett* positivt värde på C så $C = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ duger. Genom att sätta in $C = 2\sqrt{2}$ i $(*)$ ser vi att

$$\begin{cases} \cos\alpha = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin\alpha = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

För ekvationssystemet ovan finns som bekant oändligt många lösningar, men för oss räcker det att hitta en. Till exempel $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ fungerar. Vi har nu visat att

$$-2\sin t + 2\cos t = 2\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{3\pi}{4}\right), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Vi kan nu utnyttja detta för att lösa den efterfrågade ekvationen (med $t = 3x$):

$$\begin{aligned} -2\sin 3x + 2\cos 3x = \sqrt{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \text{eller} \\ 3x + \dfrac{3\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{7\pi}{36} + \dfrac{2\pi n}{3} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{2\pi n}{3}, \end{cases} \end{aligned}$$

där $n \in \mathbf{Z}$.

Svar: $C = 2\sqrt{2}$ och $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$; $\quad x = -\dfrac{7\pi}{36} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$, eller $x = \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$

5. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd D_f för f. Vi vet att $\ln t$ endast är definierad då $t > 0$, så vi måste kräva att

$$\frac{e^x - 2}{1 - e^x} > 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		0		$\ln 2$	
$e^x - 2$	$-$		$-$	0	$+$
$1 - e^x$	$+$	0	$-$		$-$
$\dfrac{e^x - 2}{1 - e^x}$	$-$	☠	$+$	0	$-$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är positivt precis då $0 < x < \ln 2$. Alltså blir $D_f =]0, \ln 2[$. Inversen finner vi genom att lösa ut x ur sambandet $y = f(x)$. Låt $x \in D_f$. Då gäller att

$$
\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \ln \frac{e^x - 2}{1 - e^x} \quad \Leftrightarrow \quad e^y = \frac{e^x - 2}{1 - e^x} \\
&\Leftrightarrow \quad e^x\left(1 + e^y\right) = e^y + 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \frac{e^y + 2}{e^y + 1} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \ln \frac{e^y + 2}{e^y + 1}.
\end{aligned}
$$

Svar: $D_f =]0, \ln 2[$ och $f^{-1}(y) = \ln \dfrac{e^y + 2}{1 + e^y}$.

6. (a) Vi ser att $z = 1$ gör att både vänster- och högerled blir 0, så $z - 1$ måste vara en faktor i vänsterledet. Vi faktoriserar ut $z - 1$ ur båda sidor (polynomdivision) och finner att

$$(z - 1)(4z^2 + 8z + 15) = 8iz(z - 1).$$

Om $z \neq 1$ så måste alltså

$$4z^2 + 8z + 15 = 8iz \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + 2(1 - i)z + \frac{15}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z + (1 - i))^2 + 2i + \frac{15}{4} = 0.$$

Låt $w = z + 1 - i$. Vi löser

$$w^2 = -\frac{15}{4} - 2i, \tag{i}$$

genom att låta $w = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$. Detta leder till att

$$w^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = -\frac{15}{4} - 2i.$$

Likhet gäller precis då real- respektive imaginärdelarna av ekvationen är lika, så

$$a^2 - b^2 = -\frac{15}{4} \tag{ii}$$

och

$$2ab = -2. \tag{iii}$$

Observera även att (i) medför att

$$|w^2| = \left| -\frac{15}{4} - 2i \right| = \frac{\sqrt{15^2 + 64}}{4} = \frac{17}{4}$$

och eftersom $|w^2| = |w|^2 = a^2 + b^2$ vet vi nu att

$$a^2 + b^2 = \frac{17}{4}. \tag{iv}$$

Genom att addera ekvation (ii) och ekvation (iv) ser vi att

$$2a^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\frac{1}{2}.$$

Om $a = 1/2$ blir $b = -2$ och om $a = -1/2$ blir $b = 2$ (enligt ekvation (iii)). Vi har alltså lösningarna

$$w = \frac{1}{2} - 2i \qquad \text{och} \qquad w = -\frac{1}{2} + 2i$$

till ekvation (i). Eftersom $z = w - 1 + i$ följer det att

$$z = -\frac{1}{2} - i \qquad \text{och} \qquad z = -\frac{3}{2} + 3i$$

samt $z = 1$ är lösningarna till den ursprungliga ekvationen.

(b) Enligt definition så är $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ för $x \in \mathbf{R}$. Då kommer

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x.$$

Addition och subtraktion av dessa två ekvationer leder till

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

och

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Svar: (a) $z = 1,\ z = -\frac{1}{2} - i,\ z = -\frac{3}{2} + 3i$ (b) se ovan.

7. Vi låter $t = e^x$ för $x \in \mathbf{R}$. Då kan ekvationen skrivas

$$\begin{aligned} 6\arctan e^x + \ln 27 = \pi - 6x \quad &\Leftrightarrow \quad 6\arctan t + 6\ln t = \pi - \ln 27 \\ &\Leftrightarrow \quad \arctan t + \ln t = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\ln 3 = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Eftersom vänsterledet i den sista ekvationen består av en strängt växande funktion (både $\arctan t$ och $\ln t$ är strängt växande för $t > 0$) kan det högst finnas ett t som gör att vänsterledet precis blir den konstant som står i högerledet. Genom identifikation ser vi att $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ löser ekvationen. Således har den ursprungliga ekvationen endast lösningen $x = \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\ln 3$.

Svar: $x = -\frac{1}{2}\ln 3$ är enda lösningen.