Lösningsförslag TATM79 2016-08-16 14–19

1. (a) Vi flyttar över allt på ena sidan och skriver allt på samma bråk:

$$\frac{x^2+3x+2}{x-5} < x+1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+3x+2-(x+1)(x-5)}{x-5} = \frac{7(x+1)}{x-5} < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{x-5} < 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		-1		5	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x+1}{x-5}$	$+$	0	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är negativt precis då $-1 < x < 5$.

(b) Summan tolkas som aritmetisk och den konstanta skillnaden mellan närliggande termer blir 7. Summan kan därför skrivas $\sum_{k=0}^{n}(-19+7k)$. Vad n måste ha för värde finner vi enkelt genom att skriva

$$-19+7n = 674 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{674+19}{7} = \frac{693}{7} = 99.$$

Alltså kan summan räknas ut enligt

$$\sum_{k=0}^{99}(-19+7k) = \frac{-19+674}{2}\cdot 100 = 32750.$$

(c) En binomialkoefficient kan definieras genom sambandet $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$. Ekvivalent är att definiera $\binom{n}{k}$ genom formeln

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Båda dessa uttryck är definierade för heltal n och k sådana att $1 \le k \le n$.

Svar: (a) $-1 < x < 5$. (b) 32750. (c) Se ovan.

2. För att logaritmerna ska vara definierade krävs att $x+2>0$, $4-x>0$, samt att $x>0$. Alltså måste $0<x<4$ gälla. Antag att detta är sant. Då blir

$$\ln(x+2)-\ln(4-x) = \frac{1}{2}\ln x \quad \Leftrightarrow \quad 2\ln\left(\frac{x+2}{4-x}\right) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)^2}{(4-x)^2} = x$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+2)^2 = x(4-x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^3-9x^2+12x-4=0.$$

Vi gissar en rot och finner att $x=1$ är ett nollställe. Till exempel polynomdivision kan sedan användas för att faktorisera:

$$x^3-9x^2+12x-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x^2-8x+4)=0.$$

Eftersom

$$x^2 - 8x + 4 = (x-4)^2 - 12 = (x - 4 - \sqrt{12})(x - 4 + \sqrt{12})$$

och $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ så ges alltså alla kandidater till lösningar av $x = 1$ och $x = 4 \pm 2\sqrt{3}$. Eftersom $0 < 2\sqrt{3} < 4$ så ligger endast $x = 1$ och $x = 4 - 2\sqrt{3}$ i intervallet $0 < x < 4$.

Svar: $x = 1$ och $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

3. (a) Direkt ur enhetscirkeln ser vi att

$$\sin 5x = \sin 3x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x = 3x + 2\pi n \\ \quad \text{eller} \\ 5x = \pi - 3x + 2\pi n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \pi n \\ \quad \text{eller} \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}, \end{cases}$$

där $n \in \mathbf{Z}$.

(b) Vi utnyttjar additionsformeln för tangens och formulerar om ekvationen enligt

$$\tan 2x = 3\tan x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = 3\tan x \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = 0 \text{ eller } 1 - \tan^2 x = \frac{2}{3}.$$

Två fall således:

$$\tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z},$$

och

$$\tan^2 x = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Svar: (a) πn eller $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$ (b) πn eller $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd D_f för f. Vi vet att $\ln t$ endast är definierad då $t > 0$, så vi måste kräva att

$$\frac{1 + e^{2x}}{7 - e^{2x}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7 - e^{2x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} < 7 \quad \Leftrightarrow \quad 2x < \ln 7 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{2}\ln 7.$$

Här har vi utnyttjat att exponentialfunktionen är strängt växande samt att $1 + e^{2x} > 1$ för alla x (och därmed inte kan påverka olikheten). Alltså blir $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x < \frac{1}{2}\ln 7\}$.

Inversen finner vi genom att lösa ut x ur sambandet $y = f(x)$. Låt $x \in D_f$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \ln\frac{1 + e^{2x}}{7 - e^{2x}} \quad \Leftrightarrow \quad e^y = \frac{1 + e^{2x}}{7 - e^{2x}} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{2x}(1 + e^y) = 7e^y - 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} = \frac{7e^y - 1}{1 + e^y} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{7e^y - 1}{1 + e^y}\right). \end{aligned}$$

Svar: D_f ges av $x < \dfrac{1}{2}\ln 7$ och $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{7e^y - 1}{1 + e^y}\right)$.

5. (a) Kända trigonometriska formler resulterar i att

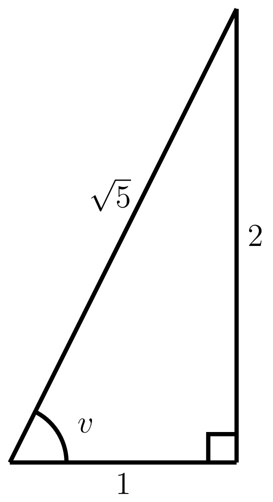
$$\begin{aligned}\cos\arctan(-2) &= \cos(-\arctan 2)\\ &= \cos(\arctan 2).\end{aligned}$$

Vinkeln arctan 2 uppfyller

$$0 < \arctan 2 < \frac{\pi}{2},$$

så ur en hjälptriangel erhåller vi

$$\cos(\arctan 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$



(b) Vi ser direkt att $\pi/2 < \alpha, \beta < \pi$. Det är komplicerat att jämföra uttrycken direkt, så vi försöker att jämföra tangens för de båda uttrycken i stället. Eftersom tangens är strängt växande på intervallet $[\pi/2, \pi]$ kommer detta att generera samma svar på frågan. Sålunda,

$$\tan\alpha = \tan(2\arctan 3) = \frac{2\tan(\arctan 3)}{1-\tan^2(\arctan 3)} = \frac{6}{1-9} = -\frac{3}{4}$$

och

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{+\sqrt{1-\cos^2\beta}}{-\sqrt{3/5}} = -\frac{\sqrt{2/5}}{\sqrt{3/5}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

där vi nyttjande den trigonometriska ettan

$$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-\frac{3}{5}$$

och det faktum att $\sin\beta > 0$. Eftersom

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = \frac{27}{48} < \frac{32}{48} < \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3},$$

så ser vi att $\tan\beta < \tan\alpha$, så $\beta < \alpha$ (tangens strängt växande på intervallet).

Alternativ: det går även bra att ta cos eller sin av α respektive β. I fallet cos utnyttjar vi istället att cos är strängt avtagande på intervallet.

Svar: (a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (b) Talet α är störst.

6. Ekvationen är binomisk och sådana löser vi oftast genom att gå över till polära koordinater. Först skriver vi ekvationen som

$$\begin{aligned}z^4 &= -25\cos\frac{\pi}{5} + i\cdot 25\sin\frac{\pi}{5} = -25\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\\ &= -25\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = 25e^{i\pi - i\pi/5} = 25e^{4i\pi/5}.\end{aligned}$$

Sedan skriver vi $z = re^{i\theta}$ för $r > 0$ och $\theta \in \mathbf{R}$. Vi söker alla lösningar till ekvationen

$$w^4 = r^4 e^{i4\theta} = 25e^{4i\pi/5}. \qquad (\heartsuit)$$

För att (♥) ska gälla måste högerledet och vänsterledet ha samma absolutbelopp och argumenten måste stämma överens upp till en heltalsmultipel av 2π. Således måste

$$r^4 = 25 \quad \text{och} \quad 4\theta = \frac{4\pi}{5} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Eftersom $r > 0$ måste $r = 25^{1/4} = \sqrt{5}$ (enda möjligheten), och θ kan vi lösa ut ur den andra ekvationen som

$$\theta = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Eftersom lösningarna ligger jämt fördelade på en cirkel och det finns precis 4 lösningar så räcker det med, tex, $n = 0, 1, 2, 3$. Lösningarna till (♥) ges alltså av

$$z = \sqrt{5} e^{i\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi n}{2}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

Svar: $\sqrt{5} \exp\left(i\frac{\pi}{5} + i\frac{\pi n}{2}\right)$, $n = 0, 1, 2, 3$.

7. Eftersom $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ kan vi skriva

$$\left(\frac{\operatorname{Re} z}{z}\right)^n = \left(\frac{z + \bar{z}}{2z}\right)^n = 2^{-n}\left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right)^n.$$

Vi använder nu binomialsatsen för att expandera uttrycket ovan enligt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{-n} 1^{n-k} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^k &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^k = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{\bar{z}z}{z^2}\right)^k \\ &= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{|z|}{z}\right)^{2k}. \end{aligned}$$

Svar: Se ovan.