

# Lösningförslag TATM79 2016-01-04 14–19

1. (a) Vi möblerar om och kvadrerar:

$$x + \sqrt{3 - 2x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3 - 2x} = -x \Rightarrow 3 - 2x = x^2 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0.$$

Kandidaten  $x = 1$  löser inte ekvationen eftersom  $1 + \sqrt{1} = 2 \neq 0$ . Däremot löser kandidaten  $x = -3$  ekvationen ty  $-3 + \sqrt{3+6} = -3 + 3 = 0$ . Observera att denna kontroll är **nödvändig** för att lösningen ska vara korrekt (på grund av implikationen ovan).

- (b) Då  $\ln$  är injektiv följer det att

$$\begin{aligned} \ln(e^x + 2) = x + \ln 2 &\Leftrightarrow e^x + 2 = e^{x+\ln 2} = e^{\ln 2} e^x = 2e^x \\ &\Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2. \end{aligned}$$

**Svar:** (a)  $x = -3$ . (b)  $x = \ln 2$ .

2. Eftersom  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$  kan vi enligt Eulers formler skriva

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos 3x &= \frac{1}{2} \cos 3x - \left( \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{4} \right) \left( \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{8} (e^{i5x} + e^{-i5x} + e^{ix} + e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{4} \cos 5x - \frac{1}{4} \cos x. \end{aligned}$$

Ekvationen vi vill lösa kan därför formuleras som

$$\begin{aligned} 2 \cos 3x - \cos 5x - \cos x + \cos 5x + \cos x &= \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow 3x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ &\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, \end{aligned}$$

där  $n \in \mathbf{Z}$ .

**Svar:**  $\sin^2 x \cos 3x = \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{4} \cos 5x - \frac{1}{4} \cos x$ ;  $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

3. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. Vi ser direkt att  $x > 0$  är kravet för att logaritmen ska vara definierad. Vidare får inte

$$1 - \ln 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{e}{3}.$$

Alltså blir

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R} : x > 0, x \neq \frac{e}{3} \right\}.$$

Låt  $x \in D_f$ . Då gäller att

$$\begin{aligned} y = \frac{2}{1 - \ln 3x} &\Rightarrow y(1 - \ln 3x) = 2 \\ &\Rightarrow \frac{y - 2}{y} = \ln 3x \\ &\Rightarrow 3x = \exp\left(1 - \frac{2}{y}\right) \\ &\Rightarrow x = \frac{1}{3} \exp\left(1 - \frac{2}{y}\right). \end{aligned}$$

Eftersom vi finner högst en lösning för varje  $y$  så måste detta vara ett uttryck för  $f^{-1}(y)$ .

**Svar:**  $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x > 0, x \neq \frac{e}{3}\}$  och  $f^{-1}(y) = \frac{1}{3} \exp\left(1 - \frac{2}{y}\right)$ .

4. För att alla logaritmer i ekvationen ska vara definierade krävs att  $x < 4$  och  $2 - |x| > 0$ . Eftersom

$$2 - |x| > 0 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

kan alla villkor ersättas med  $-2 < x < 2$ . För dessa  $x$  gäller att

$$\begin{aligned} \ln(2 - |x|) + \ln(4 - x) = \ln 5 &\Leftrightarrow \ln((2 - |x|)(4 - x)) = \ln(5) \\ &\Leftrightarrow (2 - |x|)(4 - x) = 5, \end{aligned}$$

där vi utnyttjat att  $\ln$  är injektiv. Vi delar upp i två fall. Först när  $-2 < x \leq 0$ . Då ges ekvationen av

$$(2 + x)(4 - x) = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm 2.$$

Endast  $x = -1$  uppfyller villkoren. När  $0 \leq x < 2$  gäller att

$$(2 - x)(4 - x) = 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{6}.$$

Endast  $x = 3 - \sqrt{6}$  uppfyller villkoren.

**Svar:**  $x = -1$  eller  $x = 3 - \sqrt{6}$ .

5. (a) Om  $a, b \in \mathbf{R}$  och  $n \in \mathbf{Z}$  med  $n \geq 0$  kan binomialsatsen formuleras som

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(b) Vi använder binomialsatsen och utvecklar enligt

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{101} &= \sum_{k=0}^{101} \binom{101}{k} x^{2k} \left(\frac{2}{x}\right)^{101-k} \\ &= \sum_{k=0}^{101} \binom{101}{k} 2^{101-k} x^{2k} x^{k-101} \\ &= \sum_{k=0}^{101} \binom{101}{k} 2^{101-k} x^{3k-101}. \end{aligned}$$

Termen som innehåller  $x^{100}$  förekommer precis en gång i summan ovan, nämligen precis då

$$3k - 101 = 100 \Leftrightarrow k = 67.$$

Koefficienten före  $x^{100}$  blir således  $\binom{101}{67} 2^{34}$ .

(c) Enligt definitionen  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  för  $\theta \in \mathbf{R}$  kan vi skriva

$$\begin{aligned} \frac{e^{ix}}{e^{iy}} &= \frac{\cos x + i \sin x}{\cos y + i \sin y} = \frac{(\cos x + i \sin x)(\cos y - i \sin y)}{(\cos y + i \sin y)(\cos y - i \sin y)} \\ &= \frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y + i(\sin x \cos y - \cos x \sin y)}{\cos^2 y + \sin^2 y} \\ &= \cos(x - y) + i \sin(x - y) = e^{i(x-y)}, \end{aligned}$$

där vi endast använt välkända trigonometriska formler och definitionen av  $e^{i\theta}$ .

**Svar:** (a) Se ovan. (b)  $\left(\frac{101}{67}\right)2^{34}$ . (c) Se ovan.

6. Låt

$$\beta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{och} \quad \gamma = \arctan \frac{1}{7}.$$

Då är

$$\tan \alpha = \tan(2\beta - \gamma) = \frac{\tan 2\beta - \tan \gamma}{1 + \tan 2\beta \tan \gamma}.$$

Eftersom

$$\tan \gamma = \frac{1}{7} \quad \text{och} \quad \tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta}$$

behöver vi räkna ut  $\tan \beta$ . Vi vet att  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ , så

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{1/\sqrt{5}}{\sqrt{1 - (1/\sqrt{5})^2}} = \frac{1}{2}$$

enligt den trigonometriska ettan

$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$$

och det faktum att  $\cos \beta > 0$ . Således erhåller vi nu att

$$\tan 2\beta = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

och därmed att

$$\tan \alpha = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{7}} = 1.$$

Eftersom

$$\tan v = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z},$$

så måste  $\alpha = \frac{\pi}{4} + n\pi$  för *något*  $n \in \mathbf{Z}$ . Eftersom  $\alpha$  är en given vinkel, finns det bara ett  $n$  som är rätt. Det återstår alltså bara att bestämma  $n$  och för att göra det **måste** vi ha en uppfattning om hur stor  $\alpha$  är. Vi utnyttjar att  $0 < \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$  och ser att

$$-\frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} < \alpha < 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = \pi.$$

Detta innebär att endast  $n = 0$  är möjligt. Alltså är  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

**Svar:**  $\frac{\pi}{4}$ .

7. För  $|z| = 1$  gäller att

$$\begin{aligned} w = \frac{z - 2i}{z + 2i} &\Leftrightarrow w(z + 2i) = z - 2i \\ &\Leftrightarrow z(w - 1) = -2iw - 2i = -2i(w + 1) \\ &\Leftrightarrow z = -2i \frac{w + 1}{w - 1}. \end{aligned}$$

Detta innebär att  $w \in \mathbf{C}$  måste uppfylla

$$1 = |z| = 2 \frac{|w+1|}{|w-1|} \Leftrightarrow |w-1|^2 = 4|w+1|^2.$$

För att se vad detta innebär geometrisk låter vi  $w = a + bi$ , där  $a, b \in \mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned} |w-1|^2 = 4|w+1|^2 &\Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = 4((a+1)^2 + b^2) \\ &\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 + b^2 = 4a^2 + 8a + 4 + 4b^2 \\ &\Leftrightarrow 3a^2 + 10a + 3b^2 + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + \frac{10}{3}a + b^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(a + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + b^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(a + \frac{5}{3}\right)^2 + b^2 = \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

Alltså är detta cirkeln i det komplexa talplanet som ges av  $\left|w + \frac{5}{3}\right| = \frac{4}{3}$ . Dessa  $w$  kan representeras som

$$w = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

**Svar:**  $w = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ . En cirkel i  $\mathbf{C}$  med centrum i  $-\frac{5}{3}$  och radie  $\frac{4}{3}$ .