Tentamen i TATM79, 2015-08-18 lösningsförslag

1. (a) $\dfrac{x+2}{x} \leq x \iff \dfrac{x^2-(x+2)}{x} \geq 0 \iff \dfrac{(x+1)(x-2)}{x} \geq 0$. Teckentabellen

x		-1		0		2	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{(x+1)(x-2)}{x}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

visar att olikheten gäller då $-1 \leq x < 0$ eller $x \geq 2$. Svar: $-1 \leq x < 0$ eller $x \geq 2$.

(b) $\dbinom{14}{11} = \dbinom{14}{14-11} = \dbinom{14}{3} = \dfrac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 14 \cdot 13 \cdot 2 = 364.$ Svar: 364.

2. (a) $e^{-3\ln 2} \cdot \ln \dfrac{9}{e^8} - \dfrac{1}{4}\ln 3 = e^{\ln\left(2^{-3}\right)} \cdot \left(\ln 9 - \ln\left(e^8\right)\right) - \dfrac{1}{4}\ln 3 = \dfrac{1}{8}\left(2\ln 3 - 8\right) - \dfrac{1}{4}\ln 3 = -1.$

Svar: -1.

(b) Logaritmuttrycken är definierade då $2-x>0$ och $\dfrac{10}{3} - x > 0$, dvs då $x<2$.

För dessa x är $2\ln(2-x) - \ln\left(\dfrac{10}{3} - x\right) = \ln 3 \iff \ln(2-x)^2 = \ln\left(3\left(\dfrac{10}{3} - x\right)\right) \iff$

$\iff \ln(2-x)^2 = \ln(10-3x) \iff$ /ln är injektiv/ $\iff (2-x)^2 = 10-3x \iff$

$\iff x = 3$ eller $x=-2$. Men av dessa är det endast $x=-2$ som uppfyller villkoret $x<2$, dvs $x=-2$ är enda lösningen.

Svar: $x=-2$.

3. (a) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{5}\right) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{5}\right) \iff \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{5} = x + \dfrac{\pi}{5} + 2n\pi \\ \text{eller} \\ x - \dfrac{\pi}{5} = \pi - \left(x + \dfrac{\pi}{5}\right) + 2n\pi \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} -\dfrac{2\pi}{5} = 2n\pi \\ \text{eller} \\ 2x = \pi + 2n\pi \end{cases}$ där n är heltal. Den övre ekvationen saknar lösningar medan den undre har lösningarna $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$. Svar: $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ där n är heltal.

(b) Då x är reellt så är $|i\cos x - \sin x| = \sqrt{(-\sin x)^2 + (\cos x)^2} = \sqrt{1} = 1$. Svar: 1.

(c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) + \sin\dfrac{\pi}{3} \cdot \sin\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right).$

Eftersom $0 < \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right) < \pi \implies \sin\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) > 0$ så är

$\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)} = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$ Därav följer att $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{2\sqrt{6}-1}{6}.$

Svar: $\dfrac{2\sqrt{6}-1}{6}$.

4. $z^3 + 2\sqrt{2}\,i = 0 \iff z^3 = -2\sqrt{2}\,i \iff z^3 = 2^{3/2} \cdot e^{-i\pi/2}$. Låt $z = re^{iv}$ där $r \geq 0$ och $v \in \mathbf{R}$ så fås

$z^3 = 2^{3/2} \cdot e^{-i\pi/2} \iff r^3 e^{3iv} = 2^{3/2} \cdot e^{-i\pi/2} \iff$

$$\iff \begin{cases} (Abs): \ r^3 = 2^{3/2},\ r \geq 0 \\ (Arg): \ 3v = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ v = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2n\pi}{3},\ n \text{ är heltal} \end{cases}$$ så de tre lösningarna

blir $z_1 = \sqrt{2}e^{-\pi i/6} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{3}{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/2} = i\sqrt{2}$ samt

$z_3 = \sqrt{2}e^{7\pi i/6} = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Svar: $z = i\sqrt{2}$ eller $z = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

5. Låt första termen vara a och skillnaden mellan termerna d, så att summan är $s = \displaystyle\sum_{k=0}^{19}(a + k \cdot d)$.

De båda villkoren ger då sambanden $\begin{cases} (a+4d)(a+5d) = a \\ a - 2 = 2(a+4d) \end{cases} \iff \begin{cases} (a+4d)(a+5d) = a \\ a = -2 - 8d \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} (-2-4d)(-2-3d) = -2-8d \\ a = -2-8d \end{cases} \iff \begin{cases} 12d^2 + 22d + 6 = 0 \\ a = -2-8d \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} d = -3/2 \text{ eller } d = -1/3 \\ a = -2-8d \end{cases} \iff \begin{cases} a = 10,\ d = -3/2 \\ \text{eller} \\ a = 2/3,\ d = -1/3. \end{cases}$$

Den aritmetiska summan $s = \displaystyle\sum_{k=0}^{19}(a + k \cdot d) = 20 \cdot \frac{a + (a+19d)}{2} = 10(2a + 19d)$, vilket i de två fallen ger $s = -85$ (då $a = 10,\ d = -3/2$) respektive $s = -50$ (då $a = 2/3,\ d = -1/3$).

Svar: Summan kan anta värdena -85 eller -50.

6. $6\sin 3x = 5 + 8\cos 3x \iff 6\sin 3x - 8\cos 3x = 5 \iff$

$$\iff 10\left(\frac{3}{5}\sin 3x - \frac{4}{5}\cos 3x\right) = 5 \iff \frac{3}{5}\sin 3x - \frac{4}{5}\cos 3x = \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff \Big/ \cos v = \frac{3}{5}, \sin v = -\frac{4}{5} \text{ har en lösning } v = -\arccos\frac{3}{5} \ \left(= -\arcsin\frac{4}{5}\right) \Big/ \iff$$

$$\iff \cos\left(-\arccos\frac{3}{5}\right)\sin 3x + \sin\left(-\arccos\frac{3}{5}\right)\cos 3x = \sin\left(3x - \arccos\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x - \arccos\dfrac{3}{5} = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \text{eller} \\ 3x - \arccos\dfrac{3}{5} = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{3}{5} + \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{3}{5} + \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3} \end{cases}$$ där n är heltal.

Svar: $x = \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{3}{5} + \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{3}{5} + \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3} \end{cases}$ där n är heltal.

7. För $x \neq 0$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$ är $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-k^2 x} = e^{-x} + e^{-4x} + e^{-9x} + \cdots + e^{-n^2 x} \leq$

$$\leq e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + \cdots + e^{-n^2 x} = \sum_{k=1}^{n^2} e^{-kx} = \sum_{k=1}^{n^2} \left(e^{-x}\right)^k =$$

$= \Big/$ geometrisk summa med första term$= e^{-x}$, kvot$= e^{-x} \neq 1$ och med n^2 termer $\Big/ =$

$$= e^{-x} \cdot \frac{1 - \left(e^{-x}\right)^{n^2}}{1 - e^{-x}} = \frac{1 - e^{-n^2 x}}{e^x - 1}, \text{ dvs } \sum_{k=1}^{n} e^{-k^2 x} \leq \frac{1 - e^{-n^2 x}}{e^x - 1}, \text{ vsv.}$$