Tentamen i TATM79, 2015-01-07 lösningsförslag

1. (a) En aritmetisk summa s med 100 termer har formen $s = \displaystyle\sum_{k=0}^{99}(a + k \cdot d)$, där a är första termen och d är differensen. Andra termen är $a + d = -1$ och 10:e termen är $a + 9d = 11$, dvs vi får ekvationssystemet $\begin{cases} a + d = -1 \\ a + 9d = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 3/2 \\ a = -5/2 \end{cases}$ och därmed är

$$s = \text{antal termer} \cdot \frac{\text{första term} + \text{sista term}}{2} = 100 \cdot \frac{-\frac{5}{2} + \left(-\frac{5}{2} + 99 \cdot \frac{3}{2}\right)}{2} = 7175.$$

Svar: $s = 7175$.

(b) $\dfrac{9x^2+1}{x+1} \leq 3 \iff \dfrac{9x^2+1}{x+1} - 3 \leq 0 \iff \dfrac{9x^2+1-3(x+1)}{x+1} \leq 0 \iff$

$\iff \dfrac{9x^2-3x-2}{x+1} \leq 0 \iff \dfrac{x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}}{x+1} \leq 0 \iff \dfrac{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{3}{6}\right)^2}{x+1} \leq 0 \iff$

$\iff \dfrac{\left(x - \frac{1}{6} - \frac{3}{6}\right)\left(x - \frac{1}{6} + \frac{3}{6}\right)}{x+1} \iff \dfrac{\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{x+1} \leq 0.$ Teckentabellen

x		-1		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	
$x - \frac{2}{3}$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x + \frac{1}{3}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{x+1}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

visar att olikheten gäller då $x < -1$ eller $-\dfrac{1}{3} \leq x \leq \dfrac{2}{3}$.

Svar: $x < -1$ eller $-\dfrac{1}{3} \leq x \leq \dfrac{2}{3}$.

2. (a) $3^{x+1} - 3^3 = 1 - 9^x \iff 3 \cdot 3^x - 27 = 1 - (3^x)^2 \iff \Big/ \text{sätt } t = 3^x > 0 \Big/ \iff$

$\iff \begin{cases} t^2 + 3t - 28 = 0 \\ t > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -\dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{112}{4}} = -\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{11}{2} \\ t > 0 \end{cases} \iff t = 4 \iff$

$\iff 3^x = 4 \iff x \ln 3 = \ln 4 \iff x = \dfrac{\ln 4}{\ln 3}.$

Svar: $x = \dfrac{\ln 4}{\ln 3}$ $\left(= \log^3 4\right)$.

(b) $z^2 - (2-6i)z - 13 + 6i = 0 \iff (z - (1-3i))^2 - (1-3i)^2 - 13 + 6i = 0 \iff$
$\iff (z-(1-3i))^2 = 5 - 12i$. Sätt $z - (1-3i) = a + bi$, där a och b är reella, så fås ekvationen $(a+bi)^2 = 5 - 12i \iff a^2 - b^2 + 2abi = 5 - 12i$.

Identifiering av real- och imaginärdelar samt absolutbelopp ger

$$\begin{cases} (Re): \; a^2 - b^2 = 5 \\ (Im): \; 2ab = -12. \\ (Abs): \; a^2 + b^2 = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13. \end{cases}$$

(Re) och (Abs) ger tillsammans att $2a^2 = 18 \iff a = \pm 3$. Detta insatt i (Im) ger att om a=3 så är $b = -2$ och om $a = -3$ så är $b = 2$ (vilket även uppfyller (Re) och (Abs)). Således är $z - (1-3i) = 3 - 2i$ eller $z - (1-3i) = -3 + 2i$, dvs $z = 4 - 5i$ eller $z = -2 - i$.

Svar: $z = 4 - 5i$ eller $z = -2 - i$.

3. (a) Eftersom $3 > 0$ så är $0 < \arctan 3 < \dfrac{\pi}{2}$, och därmed kan $\arctan 3$ illustreras i en rätvinklig triangel med motstående katet $= 3$, närliggande katet $= 1$ och hypotenusa $= \sqrt{10}$ (**gör det!**). Alltså är $\sin(\arctan 3) = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Svar: $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

(b) $$\cos x = 2\tan x \iff \cos x = 2\frac{\sin x}{\cos x} \iff \begin{cases} \cos^2 x = 2\sin x \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \iff \cos^2 x = 2\sin x \iff$$

$$\iff 1 - \sin^2 x = 2\sin x \iff \Big/ \text{sätt } t = \sin x \Big/ \iff \begin{cases} t^2 + 2t - 1 = 0 \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} t = -1 \pm \sqrt{2} \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \iff t = \sqrt{2} - 1 \iff \sin x = \sqrt{2} - 1 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \arcsin(\sqrt{2} - 1) + 2n\pi \\ \text{eller} \\ x = \pi - \arcsin(\sqrt{2} - 1) + 2n\pi \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är godtyckligt heltal.}$$

Svar: $$\begin{cases} x = \arcsin(\sqrt{2} - 1) + 2n\pi \\ \text{eller} \\ x = \pi - \arcsin(\sqrt{2} - 1) + 2n\pi \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är godtyckligt heltal.}$$

4. $$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} \cdot \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{6ix} - e^{-6ix} + e^{-4ix} - e^{4ix} + e^{-2ix} - e^{2ix}}{-8i} = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} + \frac{e^{4ix} - e^{-4ix}}{2i} - \frac{e^{6ix} - e^{-6ix}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x).$$

Med hjälp av denna omskrivning fås att

$$4\sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x \iff \sin 6x = \sin 2x \iff \begin{cases} 6x = 2x + 2n\pi \\ \text{eller} \\ 6x = \pi - 2x + 2n\pi \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 4x = 2n\pi \\ \text{eller} \\ 8x = \pi + 2n\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{n\pi}{2} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{4} \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är godtyckligt heltal.}$$

Svar: $$\begin{cases} x = \dfrac{n\pi}{2} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{4} \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är godtyckligt heltal.}$$

5. f är definierad förutsatt att $2x > 0$, $3x > 0$ och $\ln 3x \neq 0$, dvs då $x > 0$, $x \neq \dfrac{1}{3}$. För dessa x fås $y = \dfrac{\ln 2x}{\ln 3x} = \dfrac{\ln 2 + \ln x}{\ln 3 + \ln x} \iff (\ln 3 + \ln x)y = \ln 2 + \ln x \iff$ $\iff (1 - y)\ln x = y\ln 3 - \ln 2 \iff \ln x = \dfrac{y\ln 3 - \ln 2}{1 - y} \iff x = e^{(y\ln 3 - \ln 2)/(1-y)}$. Eftersom varje y ger högst ett x-värde, har vi visat att inversen finns och att $f^{-1}(y) = e^{(y\ln 3 - \ln 2)/(1-y)}$.

Svar: $D_f = \{x : x > 0,\, x \neq \dfrac{1}{3}\}$, $f^{-1}(x) = e^{(x\ln 3 - \ln 2)/(1-x)}$.

6. $(z+i)^7 = (z-i)^7 \iff \Big/ z = i$ är ingen lösning till ekvationen$\Big/ \iff \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^7 = 1.$

Låt $\dfrac{z+i}{z-i} = w = re^{iv}$ där $r \geq 0$ så fås

$\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^7 = 1 \iff w^7 = 1 \iff \left(re^{iv}\right)^7 = 1 \cdot e^{0i} \iff r^7 e^{7iv} = 1 \cdot e^{i0} \iff$

$$\iff \begin{cases} (Abs): \ r^7 = 1, \, r \geq 0 \\ (Arg): \ 7v = 2n\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ v = \dfrac{2n\pi}{7}, \, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

Slutligen fås $\dfrac{z+i}{z-i} = w \iff ... \iff z = i \cdot \dfrac{w+1}{w-1}$, dvs vi får lösningarna $z = i \cdot \dfrac{e^{2n\pi i/7}+1}{e^{2n\pi i/7}-1} = i \cdot \dfrac{e^{n\pi i/7}+e^{-n\pi i/7}}{e^{n\pi i/7}-e^{-n\pi i/7}} = \cot \dfrac{n\pi}{7}$, där $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ($n = 0$ ger nämnaren 0).

Svar: $z = i \cdot \dfrac{e^{2n\pi i/7}+1}{e^{2n\pi i/7}-1} = \cot \dfrac{n\pi}{7}$, där $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Anm: Vi får alltså sex olika lösningar, inte sju, vilket verkar rimligt då vi söker lösningarna till en sjättegradsekvation (syns om båda leden binomialutvecklas). Dessutom är alla lösningar reella, vilket stämmer med att avståndet till i och $-i$ ska vara lika (något som karakteriserar de reella talen).

7. $\sin(4\sin x) + \sin(4\cos x) + \cos(4\sin x) + \cos(4\cos x) =$
$= \big((\sin(4\sin x) + \cos(4\sin x)\big) + \big((\sin(4\cos x) + \cos(4\cos x)\big) =$
$= \Big/$ två hjälpvinkelomskrivningar $\Big/ = \sqrt{2}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 4\sin x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 4\cos x\right)\right)$, så
$\sin(4\sin x) + \sin(4\cos x) + \cos(4\sin x) + \cos(4\cos x) = 0 \iff$
$\iff \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 4\sin x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 4\cos x\right) = 0 \iff$
$\iff \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 4\sin x\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 4\cos x\right) \iff$
$\iff \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 4\sin x\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4} - 4\cos x\right) \iff$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + 4\sin x = -\dfrac{\pi}{4} - 4\cos x + 2n\pi \\ \text{eller} \\ \dfrac{\pi}{4} + 4\sin x = \pi + \dfrac{\pi}{4} + 4\cos x + 2n\pi \end{cases} \quad \text{för något heltal } n.$$

- Den första ekvationen ger $\sin x + \cos x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{2} \iff$
  $\iff \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{2} \iff \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\pi}{8\sqrt{2}} + \dfrac{n\pi}{2\sqrt{2}}.$
  Ekvationen har lösningar om och endast om $-1 \leq -\dfrac{\pi}{8\sqrt{2}} + \dfrac{n\pi}{2\sqrt{2}} \leq 1 \iff$
  $\iff \dfrac{1}{4} - \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} \leq n \leq \dfrac{1}{4} + \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Eftersom $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ och $3 < \pi < 3.2$ så är $\dfrac{7}{8} < \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} < 1$, och därmed är $-\dfrac{3}{4} < \dfrac{1}{4} - \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} < -\dfrac{5}{8}$ och $\dfrac{9}{8} < \dfrac{1}{4} + \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} < \dfrac{5}{4}$. Av detta följer att endast $n = 0$ och $n = 1$ ger $\dfrac{1}{4} - \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} \leq n \leq \dfrac{1}{4} + \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

  $$n = 0 \text{ ger } \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\pi}{8\sqrt{2}} \iff \begin{cases} x + \dfrac{\pi}{4} = \arcsin\left(-\dfrac{\pi}{8\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \\ \text{eller} \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \pi - \arcsin\left(-\dfrac{\pi}{8\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \end{cases} \iff$$

  $$\iff \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} - \arcsin\left(\dfrac{\pi}{8\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + \arcsin\left(\dfrac{\pi}{8\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \end{cases} \quad \text{för något heltal } k.$$

$n = 1$ ger på motsvarande sätt $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + \arcsin\left(\dfrac{3\pi}{8\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\dfrac{3\pi}{8\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \end{cases}$ för något heltal k.

- Den andra ekvationen ger $\sin x - \cos x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n\pi}{2} \iff \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}} + \dfrac{n\pi}{2\sqrt{2}}$. Villkoret $-1 \leq \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}} + \dfrac{n\pi}{2\sqrt{2}} \leq 1$ uppfylls endast för $n = 0$ och $n = -1$ (motsvarande skattningar som tidigare).

  $n = 0$ ger, med motsvarande kalkyl som tidigare, $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \arcsin\left(\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} - \arcsin\left(\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \end{cases}$ för något heltal k.

  $n = -1$ ger $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} - \arcsin\left(\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + \arcsin\left(\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \end{cases}$ för något heltal k.

$$\text{Svar: } \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} - \arcsin\left(\dfrac{\pi}{8\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + \arcsin\left(\dfrac{\pi}{8\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \arcsin\left(\dfrac{3\pi}{8\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\dfrac{3\pi}{8\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \arcsin\left(\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} - \arcsin\left(\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} - \arcsin\left(\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + \arcsin\left(\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \end{cases} \text{ för något heltal } k.$$