# Tentamen i TATM79, 2014-01-07 lösningsförslag

1. (a) $1+2x+\sqrt{8x^2-14}=0 \iff \sqrt{8x^2-14}=-1-2x \implies 8x^2-14=(-1-2x)^2$ $\iff 4x^2-4x-15=0 \iff x^2-x-\frac{15}{4}=0 \iff x=\frac{5}{2}$ eller $x=-\frac{3}{2}$. Eftersom vi ej har ekvivalens vid kvadreringen så MÅSTE vi kontrollera i ursprungliga ekvationen.

   - $x=\frac{5}{2}$ ger $V.L.=1+2\cdot\frac{5}{2}+\sqrt{8\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-14}=6+\sqrt{36}=6+6=12\neq H.L.$, dvs $x=\frac{5}{2}$ är **inte** en lösning.
   - $x=-\frac{3}{2}$ ger $V.L.=1+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{8\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2-14}=-2+\sqrt{4}=-2+2=0=H.L.$, dvs $t=-\frac{3}{2}$ är en lösning.

   *(Alt: $-1-2x=\sqrt{8x^2-14}\geq 0$ kräver att $x\leq -1/2$. För dessa $x$ är båda led $\geq 0$ och vi får ekvivalens vid kvadreringen.)*

   Svar: $x=-3/2$.

   (b) $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

2. (a) $\frac{e^{x^2}-1}{7-e^{x^2}}=\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+8} \iff \Big/ \text{sätt } t=e^{x^2}>0 \Big/ \iff \begin{cases}\frac{t-1}{7-t}=\frac{t}{t+8}\\ t>0\end{cases} \iff$

   $\iff \begin{cases}(t-1)(t+8)=t(7-t)\\ t>0,\ t\neq 7\end{cases} \iff \begin{cases}t^2-4=0\\ t>0,\ t\neq 7\end{cases} \iff \begin{cases}t=\pm 2\\ t>0,\ t\neq 7\end{cases} \iff$

   $\iff t=2 \iff e^{x^2}=2=e^{\ln 2} \iff \Big/ \text{exponentialfunktionen är injektiv} \Big/ \iff$

   $\iff x^2=\ln 2 \iff x=\pm\sqrt{\ln 2}$.

   Svar: $x=\pm\sqrt{\ln 2}$.

   (b) Logaritmerna är definierade förutsatt att $x>0$, $\frac{1}{x}>0$, $x^2>0$, $\frac{e}{x}>0$, $x^3>0$ och $ex>0$, dvs då $x>0$. För dessa $x$ är

   $$\ln x=\frac{\ln\frac{1}{x}-\ln x^2}{\ln\frac{e}{x}+\ln x^3+\ln ex-\ln x^2} \iff \ln x=\frac{-\ln x-2\ln x}{1-\ln x+3\ln x+1+\ln x-2\ln x}$$
   $$\iff \ln x=\frac{-3\ln x}{2+\ln x} \iff \ln x\left(1+\frac{3}{2+\ln x}\right)=0 \iff$$
   $$\iff \ln x=0 \text{ eller } 2+\ln x=-3 \iff \ln x=0 \text{ eller } \ln x=-5 \iff$$
   $$\iff x=1 \text{ eller } x=e^{-5}.$$

   Svar: $x=1$ eller $x=e^{-5}$.

3. (a) Eftersom $0<\frac{1}{3}<1$ så är $0<\arccos\frac{1}{3}<\frac{\pi}{2}$ och därmed är $\arccos\frac{1}{3}$ vinkel i en rätvinklig triangel med närliggande katet $=1$, hypotenusa $=3$ och motstående katet $=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}$. RITA FIGUR! Av detta följer att $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{8}}{3}$.

   Svar: $\frac{\sqrt{8}}{3}$.

(b) $\cos^2 v = \dfrac{1}{1+\tan^2 v} = \dfrac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{16}{25} \iff \cos v = \pm\dfrac{4}{5}$. Men $\pi < v < 2\pi$ och $\tan v = \dfrac{3}{4} > 0$ så $\pi < v < \dfrac{3\pi}{2}$, vilket gör att $\cos v < 0$. Således är $\cos v = -\dfrac{4}{5}$.

*(Alt: $v = u + \pi$, där $0 < u < \pi$ och $\tan u = \tan(v-\pi) = \tan v = \dfrac{3}{4} > 0$ så $0 < u < \dfrac{\pi}{2}$. Därmed kan $u$ illustreras i en rätvinklig triangel (som i a-uppgiften) och ur denna fås att $\cos u = \dfrac{4}{5}$. Slutligen fås $\cos v = \cos(u+\pi) = -\cos u = -\dfrac{4}{5}$.)*

Svar: $\cos v = -\dfrac{4}{5}$.

(c) $3\sin 2x - 1 = 0 \iff \sin 2x = \dfrac{1}{3} \iff \Big/ -1 \le \dfrac{1}{3} \le 1 \Big/ \iff$

$$\iff \sin 2x = \sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) \iff \begin{cases} 2x = \arcsin\frac{1}{3} + n2\pi \\ \text{eller} \\ 2x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + n2\pi \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + n\pi \\ \text{eller} \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + n\pi \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.}$$

$$\text{Svar: } \begin{cases} x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + n\pi \\ \text{eller} \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + n\pi \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.}$$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos 3x = 1 + \sin 3x \iff \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos 3x - \sin 3x = 1 \iff \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{2}\cos 3x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x\right) = 1$

$\iff \Big/ \sin v = \dfrac{1}{2},\ \cos v = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ har en lösning $v = \dfrac{5\pi}{6} \Big/ \iff$

$$\iff \sin\frac{5\pi}{6}\cos 3x + \cos\frac{5\pi}{6}\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin\left(3x + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + n2\pi \\ \text{eller} \\ 3x + \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} + n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{2} + n2\pi \\ \text{eller} \\ 3x = -\frac{\pi}{6} + n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{n2\pi}{3} \\ \text{eller} \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{n2\pi}{3} \end{cases}$$

där $n$ är heltal.

$$\text{Svar: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{n2\pi}{3} \\ \text{eller} \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{n2\pi}{3} \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.}$$

5. Eftersom polynomet har reella koefficienter och $z = i\sqrt{2}$ är ett nollställe, är även $\bar{z} = -i\sqrt{2}$ ett nollställe. Polynomet innehåller således faktorerna $(z - i\sqrt{2})$ och $(z + i\sqrt{2})$. Polynomdivision (dividera $p(z)$ med $(z - i\sqrt{2})(z + i\sqrt{2}) = z^2 + 2$) ger $p(z) = \left(z^2 + 2\right)\left(z^3 - 2\right)$. Övriga nollställen till $p(z)$, utöver $z = \pm i\sqrt{2}$, fås då $z^3 - 2 = 0 \iff z^3 = 2 \iff$

$$\iff \Big/ z = re^{iv} \text{ där } r \geq 0,\ v \text{ reellt} \Big/ \iff r^3 e^{3iv} = 2e^{i0} \iff \begin{cases} \text{(Abs): } r^3 = 2 \\ \text{(Arg): } 3v = 0 + n2\pi \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} r = \sqrt[3]{2} \\ v = \dfrac{n2\pi}{3} \end{cases} \iff z = \sqrt[3]{2}e^{2n\pi i/3}$$ där $n = 0,\ 1,\ 2$ ger de tre olika lösningarna till tredjegradsekvationen. Således har vi samtliga fem lösningar, nämligen $z = i\sqrt{2}$, $z = -i\sqrt{2}$, $z = \sqrt[3]{2}$, $z = \sqrt[3]{2}e^{2\pi i/3} = \sqrt[3]{2}\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ samt $z = \sqrt[3]{2}e^{4\pi i/3} = \sqrt[3]{2}\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

Svar: $z = \pm i\sqrt{2}$, $z = \sqrt[3]{2}$ samt $z = 2^{-2/3}\left(-1 \pm \sqrt{3}\,i\right)$.

6. Funktionen är definierad då $\ln\left(\dfrac{2x-3}{x-4}\right) \geq 0 \iff \dfrac{2x-3}{x-4} \geq 1 \iff \dfrac{2x-3}{x-4} - 1 \geq 0 \iff$
$\dfrac{x+1}{x-4} \geq 0 \iff \Big/ \text{teckentabell kan hjälpa} \Big/ \iff x > 4$ eller $x \leq -1$.

$$f(x) \geq \frac{\pi}{4} \iff \arctan\sqrt{\ln\left(\frac{2x-3}{x-4}\right)} \geq \frac{\pi}{4} \iff \arctan\sqrt{\ln\left(\frac{2x-3}{x-4}\right)} \geq \arctan 1 \iff$$

$$\iff \Big/ \text{arctan är strängt växande} \Big/ \iff \sqrt{\ln\left(\frac{2x-3}{x-4}\right)} \geq 1 \iff$$

$$\iff \Big/ \text{rotfunktionen är strängt växande} \Big/ \iff \ln\left(\frac{2x-3}{x-4}\right) \geq 1 \iff$$

$$\iff \Big/ \text{ln är strängt växande} \Big/ \iff \frac{2x-3}{x-4} \geq e \iff \frac{2x-3-e(x-4)}{x-4} \geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{(2-e)x + 4e - 3}{x-4} \geq 0 \iff \Big/ 2 - e < 0 \Big/ \iff \frac{x - \frac{4e-3}{e-2}}{x-4} \leq 0$$ och eftersom $\dfrac{4e-3}{e-2} = \dfrac{4(e-2)+5}{e-2} = 4 + \dfrac{5}{e-2} > 4$ så ger teckentabellen

| $x$ | | $4$ | | $\frac{4e-3}{e-4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x - \frac{4e-3}{e-4}$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x - 4$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $\frac{x - \frac{4e-3}{e-4}}{x-4}$ | $+$ | $\nexists$ | $-$ | $0$ | $+$ |

att olikheten gäller då $4 < x \leq \dfrac{4e-3}{e-2}$.

Svar: $D_f = \{x : x \leq -1 \text{ eller } x > 4\}$.
Olikheten gäller då $4 < x \leq \dfrac{4e-3}{e-2}$.

7. $\sin z = 2 \iff \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \iff e^{iz} - e^{-iz} - 4i = 0 \iff \Big/ e^{iz} \neq 0 \Big/ \iff$

$\iff \left(e^{iz}\right)^2 - 4ie^{iz} - 1 = 0$. Med $e^{iz} = w$ fås

$w^2 - 4iw - 1 = 0 \iff (w - 2i)^2 + 3 = 0 \iff (w - 2i)^2 - (\sqrt{3}\,i)^2 = 0 \iff$

$\iff (w - 2i - \sqrt{3}\,i)(w - 2i + \sqrt{3}\,i) = 0 \iff w = (2 + \sqrt{3})i$ eller $w = (2 - \sqrt{3})i$.

- $w = (2 + \sqrt{3})i$ ger $e^{iz} = (2 + \sqrt{3})i \iff$

  $\iff \Big/ z = x + iy$ ger $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y} \cdot e^{ix}$, $(2 + \sqrt{3})i = (2 + \sqrt{3})e^{\pi i/2} \Big/ \iff$

  $$\iff e^{-y} \cdot e^{ix} = (2 + \sqrt{3})e^{\pi i/2} \iff \begin{cases} \text{(Abs): } e^{-y} = 2 + \sqrt{3} \\ \text{(Arg): } x = \dfrac{\pi}{2} + n2\pi \end{cases} \iff$$

  $$\iff \begin{cases} y = -\ln(2 + \sqrt{3}) \\ x = \dfrac{\pi}{2} + n2\pi \end{cases} \iff z = \frac{\pi}{2} + n2\pi - i\ln(2 + \sqrt{3}), \text{ där } n \text{ är heltal.}$$

- $w = (2 - \sqrt{3})i$ ger $e^{iz} = (2 - \sqrt{3})i$ och på motsvarande sätt fås $z = \dfrac{\pi}{2} + n2\pi - i\ln(2 - \sqrt{3})$, där $n$ är heltal.

Svar: $z = \dfrac{\pi}{2} + n2\pi - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$, där $n$ är heltal.