Tentamen i TATM79, 2013-08-19 lösningsförslag

1. (a) Falluppdelning. $|x| = \begin{cases} x, \text{ om } x \geq 0 \\ -x, \text{ om } x \leq 0 \end{cases}$, $|2-x| = \begin{cases} x-2, \text{ om } x \geq 2 \\ 2-x, \text{ om } x \leq 2. \end{cases}$ Detta ger följande fall:

   - Om $x \leq 0$ fås $|x| + |2-x| = 3 \iff -x + 2 - x = 3 \iff x = -1/2$, som uppfyller villkoret $x \leq 0$, OK.
   - Om $0 \leq x \leq 2$ fås $|x| + |2-x| = 3 \iff x + 2 - x = 3 \iff 2 = 3$ som är olösbart.
   - Om $x \geq 2$ fås $|x| + |2-x| = 3 \iff x + x - 2 = 3 \iff x = 5/2$, som uppfyller villkoret $x \geq 2$, OK.

   Svar: $x = -1/2$ eller $x = 5/2$.

   (b) Summan är $s = \sum_{n=0}^{199}(500 + d \cdot n)$, där femte termen är $500 + 4d$ och uppfyller sambandet $500 + 4d = 476$, dvs $d = -6$. Således är $s = \sum_{n=0}^{199}(500 - 6n) =$
   $= 200 \cdot \dfrac{500 + (500 - 6 \cdot 199)}{2} = -19\,400.$

   Svar: Summan är $-19\,400$.

2. (a) Leden är definierade förutsatt att $x + 2 > 0$, $4 - 2x > 0$ och $5 - x > 0$, dvs då $-2 < x < 2$. För dessa x fås
   $\ln(x+2) = \ln(4-2x) - \ln(5-x) \iff \ln(x+2) + \ln(5-x) = \ln(4-2x) \iff$
   $\iff \ln((x+2)(5-x)) = \ln(4-2x) \iff$ / leden är definierade och ln är injektiv /
   $\iff (x+2)(5-x) = 4 - 2x \iff x^2 - 5x - 6 = 0 \iff x = -1$ eller $x = 6$, men av dessa är det endast $x = -1$ som uppfyller villkoret $-2 < x < 2$.

   Svar: $x = -1$.

   (b) Båda leden är positiva och ln är injektiv, så $2e^x = 2^x \iff \ln(2e^x) = \ln(2^x) \iff$
   $\iff x + \ln 2 = x \ln 2 \iff x(1 - \ln 2) = -\ln 2 \iff x = -\dfrac{\ln 2}{1 - \ln 2}$

   Svar: $x = -\dfrac{\ln 2}{1 - \ln 2}$.

3. (a) $\dfrac{25}{3+4i}e^{ix} = (3-4i)(\cos x + i \sin x) = 3\cos x + 4 \sin x + i(3 \sin x - 4 \cos x)$, så
   $\operatorname{Im}\left(\dfrac{25}{3+4i}e^{ix}\right) = 3 \sin x - 4 \cos x.$

   Svar: $3 \sin x - 4 \cos x$.

   (b) $4z^2 - 16iz - 13 - 4i = 0 \iff z^2 - 4iz - 13/4 - i = 0 \iff (z - 2i)^2 = i - 3/4$. Sätt $z - 2i = a + bi$ (a, b reella) så fås $(a + bi)^2 = i - 3/4 \iff a^2 - b^2 + 2abi = i - 3/4$. Identifiera realdel, imaginärdel och belopp så fås

   $$\begin{cases} (\text{Re}):\ a^2 - b^2 = -3/4 \\ (\text{Im}):\ 2ab = 1 \\ (\text{Abs}):\ a^2 + b^2 = \sqrt{(-3/4)^2 + 1^2} = 5/4 \end{cases}$$

   där (Re) + (Abs) ger $2a^2 = 1/2$, dvs $a = \pm 1/2$ och (Im) ger $b = 1/(2a)$, dvs $a = 1/2$ ger $b = 1$ och $a = -1/2$ ger $b = -1$. Kontroll visar att dessa a och b uppfyller alla tre ekvationerna. Eftersom $z = a + bi + 2i$ fås slutligen $z = 1/2 + 3i$ eller $z = -1/2 + i$.

   Svar: $z = 1/2 + 3i$ eller $z = -1/2 + i$.

4. (a) $\sin x = \sin(3x - \pi/5) \iff \sin x \iff \begin{cases} x = 3x - \pi/5 + 2n\pi \\ \text{eller} \\ x = \pi - (3x - \pi/5) + 2n\pi \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x = \pi/10 - n\pi \\ \text{eller} \\ x = 3\pi/10 + n\pi/2 \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.}$$

Svar: $x = \pi/10 + n\pi$ eller $x = 3\pi/10 + n\pi/2$ där n är heltal.

(b) $\cos x < 0$ eftersom $\pi/2 < x < \pi$. Alltså är $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -2\sqrt{2}/3$, vilket ger $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1/3}{-2\sqrt{2}/3} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Svar: $\tan x = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

(c) $\cos\left(2\arctan\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right) = \Big/ \cos 2v = 2\cos^2 v - 1 \text{ och } \cos^2 v = \dfrac{1}{1+\tan^2 v} \Big/ =$

$$= \frac{2}{1 + \tan^2\left(\arctan\frac{2}{\sqrt{7}}\right)} - 1 = \frac{2}{1 + \frac{4}{7}} - 1 = \frac{3}{11}.$$

Alt: $\cos\left(\arctan\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right)$ *kan bestämmas ur lämplig rätvinklig triangel.*

Svar: $3/11$.

5. $\sqrt{3}\cos\pi x - \sin\pi x = \sqrt{2} \iff 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\pi x - \dfrac{1}{2}\sin\pi x\right) = \sqrt{2} \iff$

$\iff \Big/ v = \pi/6$ är en lösning till $\cos v = \sqrt{3}/2,\ \sin v = 1/2 \Big/ \iff$

$\iff \cos\dfrac{\pi}{6}\cos\pi x - \sin\dfrac{\pi}{6}\sin\pi x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \iff \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \pi x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \iff$

$\iff \dfrac{\pi}{6} + \pi x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi \iff x = \dfrac{1}{12} + 2n$ eller $x = -\dfrac{5}{12} + 2n$ där n är heltal.

Svar: $x = \dfrac{1}{12} + 2n$ eller $x = -\dfrac{5}{12} + 2n$ där n är heltal.

6. Funktionen är definierad då $\dfrac{2e^x - 1}{e^x - 3} \geq 0$.

$2e^x - 1 = 0 \iff x = -\ln 2$ och $e^x - 3 = 0 \iff x = \ln 3$ så teckentabellen

x		$-\ln 2$		$\ln 3$	
$2e^x - 1$	$-$	0	$+$		$+$
$e^x - 3$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{2e^x - 1}{e^x - 3}$	$+$	0		$\nexists$	$+$

visar att funktionen är definierad då $x \leq -\ln 2$ eller $x > \ln 3$.

$y = \sqrt{\dfrac{2e^x - 1}{e^x - 3}} \implies y^2 = \dfrac{2e^x - 1}{e^x - 3} \implies y^2(e^x - 3) = 2e^x - 1 \implies$

$\implies e^x(y^2 - 2) = 3y^2 - 1 \implies e^x = \dfrac{3y^2 - 1}{y^2 - 2} \implies x = \ln\dfrac{3y^2 - 1}{y^2 - 2}$ dvs ekvationen $y = f(x)$ har högst en lösning för varje y vilket visar att f är injektiv och att $f^{-1}(y) = \ln\dfrac{3y^2 - 1}{y^2 - 2}$.

Svar: $D_f = \{x : x \leq -\ln 2 \text{ eller } x > \ln 3\}$, $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{3x^2 - 1}{x^2 - 2}$.

7. $\tan(VL) = \tan(\arctan x + \arctan(x+1)) = \dfrac{x+(x+1)}{1-x(x+1)} = \dfrac{2x+1}{1-x-x^2} = \tan(HL)$.
Dessutom gäller $-\pi/2 < HL < \pi/2$, och eftersom tan är injektiv (strängt växande) på detta intervall så kommer leden att vara lika för alla x sådana att $-\pi/2 < VL < \pi/2$.

Observera att $\arctan x$ är ett argument för ett komplext tal, $1+ix = \sqrt{1+x^2}\, e^{i\arctan x}$.
På samma sätt är $1+i(x+1) = \sqrt{1+(x+1)^2}\, e^{i\arctan(x+1)}$, så
$(1+ix)(1+i(x+1)) = \sqrt{(1+x^2)(1+(x+1)^2)}\, e^{i(\arctan x+\arctan(x+1))}$.
Eftersom $-\pi < \arctan x + \arctan(x+1) < \pi$ så följer därför att
$-\dfrac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan(x+1) < \dfrac{\pi}{2} \iff \mathrm{Re}\big((1+ix)(1+i(x+1))\big) > 0$.
Men $\mathrm{Re}\big((1+ix)(1+i(x+1))\big) = 1-x-x^2 = -(x^2+x-1) = -\left(x+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$
så teckenstudium på vanligt sätt visar att olikheten gäller då $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Svar: $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.