Tentamen i TATM79, 2013-01-07 lösningsförslag

1. (a) $\dfrac{x+1}{x} > \dfrac{x}{x+1} \iff \dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x+1} > 0 \iff \dfrac{(x+1)^2 - x^2}{x(x+1)} > 0 \iff$
$\iff \dfrac{2x+1}{x(x+1)} > 0$. Detta ger följande teckentabell

x		-1		$-1/2$		0	
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

vilket visar att olikheten gäller då $x > 0$ eller $-1 < x < -1/2$.

Svar: $x > 0$ eller $-1 < x < -1/2$.

(b) Prövning visar att $z = -2$ är en lösning till ekvationen. Polynomdivision med faktorn $z + 2$ ger kvoten $z^2 - 2z + 2$, dvs de övriga lösningarna fås ur ekvationen $z^2 - 2z + 2 = 0 \iff (z-1)^2 = -1 \iff z - 1 = \pm i \iff z = 1 \pm i$.

Svar: $z = 1 \pm i$ eller $z = -2$.

2. (a) $3^x = 6 - 9^x \iff 3^x = 6 - \left(3^2\right)^x \iff 3^x = 6 - 3^{2x} \iff 3^x = 6 - (3^x)^2 \iff$
$\iff \Big/ t = 3^x > 0 \Big/ \iff t = 6 - t^2 \iff t = 2$ (eller $t = -3$ men $t > 0$) $\iff$
$\iff 3^x = 2 \iff x \ln 3 = \ln 2 \iff x = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$.

Svar: $x = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$.

(b) De båda logaritmerna är definierade då $2-3x > 0$ och $5x-2 > 0$ dvs då $\dfrac{2}{5} < x < \dfrac{2}{3}$.
För dessa x är $\ln(2-3x) > \ln(5x-2) \iff \Big/$ ln är strängt växande $\Big/ \iff$
$\iff 2 - 3x > 5x - 2 \iff 8x < 4 \iff x < \dfrac{1}{2}$. Villkoren $\dfrac{2}{5} < x < \dfrac{2}{3}$ och $x < \dfrac{1}{2}$ ger tillsammans att $\dfrac{2}{5} < x < \dfrac{1}{2}$.

Svar: $\dfrac{2}{5} < x < \dfrac{1}{2}$.

3. (a) $\sin x = 3 \sin 2x \iff \sin x = 6 \sin x \cos x \iff \iff \sin x (1 - 6 \cos x) = 0 \iff$
$\sin x = 0$ eller $\cos x = \dfrac{1}{6}$.

- $\sin x = 0 \iff x = n\pi$ där n är heltal.
- $\cos x = \dfrac{1}{6} \iff x = \pm \arccos \dfrac{1}{6} + 2n\pi$ där n är heltal.

Svar: $x = n\pi$ eller $x = \pm \arccos \dfrac{1}{6} + 2n\pi$ där n är heltal.

(b) $\tan(u+v) = \dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$ för alla u och v där båda leden är definierade, ty

$$\tan(u+v) = \frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)} = \frac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\cos u \cos v - \sin u \sin v} = \frac{\cos u \cos v \left(\frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\sin v}{\cos v}\right)}{\cos u \cos v \left(1 - \frac{\sin u}{\cos u} \cdot \frac{\sin v}{\cos v}\right)} =$$

$= \dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$ vilket skulle bevisas.

4. (a) Med $z = a + ib$ fås att $\begin{cases} \text{Im } z = 3 \\ z\bar{z} = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 3 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 3 \\ a = \pm 2 \end{cases}$ dvs $z = \pm 2 + 3i$.

Svar: $z = \pm 2 + 3i$.

(b) Rita en figur!

Linjen L har lutningen $k_1 = \dfrac{-1-(-5)}{2-0} = 2$ så linjens ekvation är $y = -5 + 2x$. För att linjen och cirkeln endast ska ha en gemensam punkt, måste cirkeln tangera linjen. Tangeringspunkten ligger på den linje som går genom $(-1, 4)$ och som är normal till L. Den linjens lutning $k_2 = -1/2$ och ekvationen $y - 4 = -\dfrac{1}{2}(x+1)$.

Den gemensamma punkten uppfyller $\begin{cases} y = -5 + 2x \\ y = \dfrac{7}{2} - \dfrac{x}{2} \end{cases} \iff (x, y) = \left(\dfrac{17}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$.

Cirkelns radie blir då $r = \sqrt{\left(\dfrac{17}{5}+1\right)^2 + \left(\dfrac{9}{5}-4\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{22}{5}\right)^2 + \left(-\dfrac{11}{5}\right)^2} = \dfrac{11}{5}\sqrt{2^2+(-1)^2} = \dfrac{11\sqrt{5}}{5} = \dfrac{11}{\sqrt{5}}$.

Svar: Cirkelns radie är $\dfrac{11}{\sqrt{5}}$, gemensam punkt är $\left(\dfrac{17}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$.

5. $\cos x \sin 3x \sin 5x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \cdot \dfrac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} \cdot \dfrac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i} =$

$= \dfrac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{8ix}-e^{2ix}-e^{-2ix}+e^{-8ix}\right)}{-8} =$

$= \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} - \dfrac{e^{9ix}+e^{-9ix}}{2} - \dfrac{e^{7ix}+e^{-7ix}}{2}\right) =$

$= \dfrac{1}{4}(\cos 3x + \cos x - \cos 9x - \cos 7x)$. Av detta fås att

$4\cos x \sin 3x \sin 5x = \cos x + \cos 3x \Leftrightarrow \cos 9x = -\cos 7x \Leftrightarrow \cos 9x = \cos(7x+\pi) \iff 9x = 7x + \pi + 2n\pi$ eller $9x = -(7x+\pi) + 2n\pi \iff 2x = \pi + 2n\pi$ eller $16x = -\pi + 2n\pi \iff x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ eller $x = -\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{n\pi}{8}$ där n är heltal.

Svar: $\cos x \sin 3x \sin 5x = \dfrac{1}{4}(\cos 3x + \cos x - \cos 9x - \cos 7x)$.

Ekvationen har lösningarna $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ eller $x = -\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{n\pi}{8}$ där n är heltal.

6. Definitionsmängden fås ur $\pi + 6\arcsin\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) > 0 \iff \arcsin\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) > -\dfrac{\pi}{6} \iff$
$\arcsin\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) > \arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) \iff$
$\iff \Big/ \arcsin t$ är strängt växande och definierad då $-1 \le t \le 1 \Big/ \iff$
$\iff -\dfrac{1}{2} < \dfrac{1-x}{1+x} \le 1$. Vanlig olikhets-undersökning visar att
$\dfrac{1-x}{1+x} \le 1 \iff x \ge 0$ eller $x < -1$ och $\dfrac{1-x}{1+x} > -\dfrac{1}{2} \iff -1 < x < 3$. Sammantaget visar detta att funktionen är definierad då $0 \le x < 3$.

För dessa x fås $y = \ln\left(\pi + 6\arcsin\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\right) \iff e^y = \pi + 6\arcsin\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \iff$
$\arcsin\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = \dfrac{e^y-\pi}{6} \implies \dfrac{1-x}{1+x} = \sin\left(\dfrac{e^y-\pi}{6}\right) \iff x = \dfrac{1-\sin\left(\frac{e^y-\pi}{6}\right)}{1+\sin\left(\frac{e^y-\pi}{6}\right)}$ vilket visar att varje y ger *högst* ett x. Alltså är f injektiv och $f^{-1}(y) = \dfrac{1-\sin\left(\frac{e^y-\pi}{6}\right)}{1+\sin\left(\frac{e^y-\pi}{6}\right)}$.

Svar: $D_f = \{0 \le x < 3\}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1-\sin\left(\frac{e^x-\pi}{6}\right)}{1+\sin\left(\frac{e^x-\pi}{6}\right)}$.

7. $\begin{cases}(\ln y)^2 \sin\left(\pi + 5(\ln x)^2\right) = 1\\ (\ln y)^2 \cos\left(5(\ln x)^2\right) = 1\end{cases} \iff \begin{cases}(\ln y)^2 \sin\left(5(\ln x)^2\right) = -1\\ (\ln y)^2 \cos\left(5(\ln x)^2\right) = 1\end{cases} \iff$
$\iff (\ln y)^2\left(\cos\left(5(\ln x)^2\right) + i\sin\left(5(\ln x)^2\right)\right) = 1-i \iff (\ln y)^2 e^{i5(\ln x)^2} = 1-i \iff$
$\iff (\ln y)^2 e^{i5(\ln x)^2} = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4} \iff \Big/ (\ln y)^2 \ge 0$ och $5(\ln x)^2$ är reell $\Big/ \iff$
$$\iff \begin{cases}(\ln y)^2 = \sqrt{2}\\ 5(\ln x)^2 = -\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi\end{cases} \iff \begin{cases}\ln y = \pm\sqrt[4]{2}\\ \ln x = \pm\sqrt{-\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{2n\pi}{5}}\end{cases} \iff$$
$\iff \begin{cases}y = e^{\pm\sqrt[4]{2}}\\ x = e^{\pm\sqrt{-\frac{\pi}{20}+\frac{2n\pi}{5}}}\end{cases}$ där n är godtyckligt positivt heltal (för att uttrycket under rotmärket ska bli ≥ 0).

Svar: $x = e^{\pm\sqrt{-\frac{\pi}{20}+\frac{2n\pi}{5}}}$, $y = e^{\pm\sqrt[4]{2}}$ där $n = 1, 2, 3, \ldots$ och där tecknen kan väljas oberoende av varandra.