Tentamen i TATM79, 2012-08-13 lösningsförslag

1. (a) Falluppdelning: $|x| = \begin{cases} x \ , & \text{om } x \geq 0 \\ -x \ , & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$, $|x+1| = \begin{cases} x+1 \ , & \text{om } x+1 \geq 0, \text{dvs om } x \geq -1 \\ -(x+1) \ , & \text{om } x+1 \leq 0, \text{dvs om } x \leq -1 \end{cases}$

Detta ger följande tre fall

- $x \leq -1$: $2|x| - |x+1| = x/2 \iff -2x + (x+1) = x/2 \iff x = 2/3$ som **ej** tillhör intervallet.
- $-1 \leq x \leq 0$: $2|x| - |x+1| = x/2 \iff -2x - (x+1) = x/2 \iff x = -2/7$ som tillhör intervallet.
- $x \geq 0$: $2|x| - |x+1| = x/2 \iff 2x - (x+1) = x/2 \iff x = 2$ som tillhör intervallet.

Således har ekvationen lösningarna $x = -2/7$ eller $x = 2$.

Svar: $x = -2/7$ eller $x = 2$

(b) Med $z = x + iy$, där x och y är reella, fås $(z+\bar{z})^2 = 16 + (z-\bar{z})^2 \iff 4x^2 = 16 - 4y^2 \iff x^2 + y^2 = 4 = 2^2$ vilket är ekvationen för en cirkel med radie 2 och medelpunkt $(x, y) = (0, 0)$. Alternativt ger direkt utveckling $z\bar{z} = 4 \iff |z|^2 = 4 \iff |z| = 2$.

Svar: En cirkel med radie 2 och medelpunkt i origo

2. (a) $\cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) \iff 5x = \pm\left(\frac{\pi}{5} - x\right) + n2\pi \iff \begin{cases} 6x = \frac{\pi}{5} + n2\pi \\ \text{eller} \\ 4x = -\frac{\pi}{5} + n2\pi \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{30} + n\frac{\pi}{3} \\ \text{eller} \\ x = -\frac{\pi}{20} + n\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.}$$

Svar: $x = \frac{\pi}{30} + n\frac{\pi}{3}$ eller $x = -\frac{\pi}{20} + n\frac{\pi}{2}$ där n är heltal

(b) $0 < 1/3 < 1$, så $0 < \arcsin(1/3) < \pi/2$, dvs $\arcsin(1/3)$ är en vinkel i en rätvinklig triangel med hypotenusa 3 och motstående katet 1, så närliggande katet blir $\sqrt{8}$. Därmed är $\tan(\arcsin(1/3)) = 1/\sqrt{8}$.

Svar: $1/\sqrt{8}$

(c) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{6} - \sin x \sin\frac{\pi}{6} =$

$= \Big/ \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{15}/4 \text{ ty } \cos x < 0 \Big/ =$

$= -\frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1 + 3\sqrt{5}}{8}.$

Svar: $-\frac{1 + 3\sqrt{5}}{8}$

3. (a) Funktionen är definierad då $\frac{x-1}{x+1} > 0$ vilket är uppfyllt då $x > 1$ eller $x < -1$ (vilket t ex en enkel teckentabell visar). För dessa x gäller $y = \ln\frac{x-1}{x+1} \iff e^y = \frac{x-1}{x+1} \iff x - 1 = e^y(x+1) \iff x(1 - e^y) = 1 + e^y \iff x = \frac{1+e^y}{1-e^y}$ och eftersom x blir entydigt bestämt av y så är f inverterbar och $f^{-1}(y) = \frac{1+e^y}{1-e^y}$.

Svar: $D_f = \{x : \ x > 1 \text{ eller } x < -1\}$, $f^{-1}(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$

(b) $4 + \ln x \cdot \ln\frac{1}{x} = 0 \iff 4 - (\ln x)^2 = 0 \iff \ln x = \pm 2 \iff x = e^{\pm 2}$.

Svar: $x = e^2$ eller $x = e^{-2}$

4. $\sin^3 2x = \left(\dfrac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}\right)^3 = \dfrac{e^{6ix} - 3e^{2ix} + 3e^{-2ix} - e^{-6ix}}{-8i} =$

$= -\dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{e^{6ix} - e^{-6ix}}{2i} - 3 \cdot \dfrac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}\right) = -\dfrac{1}{4}(\sin 6x - 3\sin 2x)$. Detta ger vidare att

$2\sin^3 2x = \sin 6x \iff -\dfrac{1}{2}(\sin 6x - 3\sin 2x) = \sin 6x \iff \sin 6x = \sin 2x \iff$

$$\iff \begin{cases} 6x = 2x + n2\pi \\ \text{eller} \\ 6x = \pi - 2x + n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = n\pi/2 \\ \text{eller} \\ x = \pi/8 + n\pi/4 \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.}$$

Svar: $\sin^3 2x = \dfrac{1}{4}(3\sin 2x - \sin 6x)$, $x = n\pi/2$ eller $x = \pi/8 + n\pi/4$ där n är heltal

5. Summan är aritmetisk, så den har formen

$$s = \sum_{k=0}^{n}(a + kd) = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a+nd)$$

där $n \geq 3$ (heltal) eftersom summan innehåller minst 4 termer. De tre villkoren ger sambanden

(1) $a(a+3d) = 220$

(2) $(a+d)(a+2d) = 252$

(3) $a + nd = 10$

$(2) - (1)$ ger $2d^2 = 32 \iff d = \pm 4$. Sätts detta in i (1) så fås följande:

- Om $d = 4$ så är $a(a+12) = 220 \iff a = -6 \pm 16$, dvs $a = 10$ eller $a = -22$ (dessa uppfyller även (2), eftersom de uppfyller (1) och (2)-(1).) Insatt i (3) så fås
  - $d = 4,\ a = 10$ ger $10 + 4n = 10 \iff n = 0$ vilket ej duger ty $n \geq 3$.
  - $d = 4,\ a = -22$ ger $-22 + 4n = 10 \iff n = 8$, med summan $s = \sum_{k=0}^{8}(-22 + 4k) = \dfrac{-22 + 10}{2} \cdot 9 = -54.$
- Om $d = -4$ så är $a(a-12) = 220 \iff a = 6 \pm 16$, dvs $a = -10$ eller $a = 22$. Insatt i (3) så fås
  - $d = -4,\ a = -10$ ger $-10 - 4n = 10 \iff n = -5$ vilket ej duger ty $n \geq 3$.
  - $d = -4,\ a = 22$ ger $22 - 4n = 10 \iff n = 3$, med summan $s = \sum_{k=0}^{3}(22 - 4k) = \dfrac{22 + 10}{2} \cdot 4 = 64.$

Svar: Summan kan anta värdena -54 eller 64

6. Direkt insättning ger $p(i) = -4i - (6+2i) + 6i - 11 + 17 = 0$ så $p(z)$ innehåller faktorn $(z-i)$. Polynomdivision ger därefter att $p(z) = (z-i)(4z^2 + (6+6i)z + 17i) = 4(z-i)\left(z^2 + \frac{3+3i}{2}z + \frac{17i}{4}\right)$. För att faktorisera fullständigt söker vi nollställena till andragradsuttrycket.

$z^2 + \frac{3+3i}{2}z + \frac{17i}{4} = 0 \iff \left(z + \frac{3+3i}{4}\right)^2 - \left(\frac{3+3i}{4}\right)^2 + \frac{17i}{4} = 0 \iff$
$\iff \left(z + \frac{3+3i}{4}\right)^2 = -\frac{25i}{8}$. Sätt $z + \frac{3+3i}{4} = a + bi$ där a och b är reella, så fås $(a+bi)^2 = -\frac{25i}{8} \iff a^2 - b^2 + 2abi = -\frac{25i}{8}$. Identifiering av real- och imaginärdel ger ekvationerna $a^2 - b^2 = 0$ och $2ab = -25/8$, vilket i sin tur ger $a = 5/4$, $b = -5/4$ eller $a = -5/4$, $b = 5/4$. Slutligen, eftersom $z = a + bi - \frac{3+3i}{4}$, ger detta att $z^2 + \frac{3+3i}{2} + \frac{17i}{4} = 0 \iff z = \frac{1}{2} - 2i$ eller $z = -2 + \frac{i}{2}$, så $z^2 + \frac{3+3i}{2} + \frac{17i}{4} = \left(z + 2 - \frac{i}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} + 2i\right)$, eftersom $z^2 + cz + d = (z - r_1)(z - r_2)$ då r_1 och r_2 är nollställen till $z^2 + cz + d$. Således är $p(z) = 4(z-i)\left(z + 2 - \frac{i}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} + 2i\right) =$
$= (z-i)(2z + 4 - i)(2z - 1 + 4i)$.

Svar: $p(z) = (z-i)(2z+4-i)(2z-1+4i)$

7. $s_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k+1} - \frac{1}{4\cdot 2^k + 1}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k+1}\right) - \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{k+2}+1}\right) =$
$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k+1}\right) - \sum_{k=2}^{n+2}\left(\frac{1}{2^k+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2^{n+1}+1} + \frac{1}{2^{n+2}+1}\right) =$
$= \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{2^{n+1}+1} + \frac{1}{2^{n+2}+1}\right)$. Därmed fås $\left|s_n - \frac{5}{6}\right| = \frac{1}{2^{n+1}+1} + \frac{1}{2^{n+2}+1} <$
$< \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$ så $\left|s_n - \frac{5}{6}\right| < 10^{-6}$ gäller åtminstone om $2^n \geq 10^6$ och eftersom $2^{10} = 1024 > 10^3$ så är $2^n > 10^6$ för alla heltal $n \geq 20$, dvs $N = 20$ räcker.

Svar: $s_n = \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{2^{n+1}+1} + \frac{1}{2^{n+2}+1}\right)$, $N = 20$ räcker