

Tentamen i TATM79, 2012-01-10, lösningsförslag

1. (a) Vi ser att $\frac{x}{2} - 1 \geq 0$ dvs $x \geq 2$, för att leden ska ha samma tecken. För $x \geq 2$ är $\sqrt{2-x} = \frac{x}{2} - 1 \iff 2-x = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$ varav endast $x = 2$ uppfyller villkoret $x \geq 2$. Svar: $x = 2$
- (b) $\sum_{k=2}^{101} e^{3k} = \sum_{k=2}^{101} (e^3)^k =$ /geometrisk summa, 100 termer, första term e^6 , kvot e^3 / = $= e^6 \cdot \frac{(e^3)^{100} - 1}{e^3 - 1} = e^6 \cdot \frac{e^{300} - 1}{e^3 - 1}$. Svar: $e^6 \cdot \frac{e^{300} - 1}{e^3 - 1}$
2. (a) $\frac{\ln\left(e^{2\ln 2} \cdot \left(\ln \frac{1}{e^2}\right)^2\right)}{\ln\left[e^{-\ln 2} + \ln\left((\sqrt{e})^3\right)\right]} = \frac{\ln\left(e^{\ln 2^2} \cdot \left(\ln(e^{-2})\right)^2\right)}{\ln\left(e^{\ln(1/2)} + \ln(e^{3/2})\right)} = \frac{\ln(2^2 \cdot (-2)^2)}{\ln(1/2 + 3/2)} = \frac{\ln 16}{\ln 2} = \frac{\ln 2^4}{\ln 2} = \frac{4 \ln 2}{\ln 2} = 4$ Svar: $x = 4$
- (b) Logaritmerna är definierade då $2-x > 0$, $2+x > 0$ och $1-2x > 0$, dvs då $-2 < x < 1/2$. För dessa x är $\ln(2-x) = \ln(2+x) - \ln(1-2x) \iff \ln(2-x) + \ln(1-2x) = \ln(2+x) \iff (2-x)(1-2x) = 2+x \iff 2x^2 - 6x = 0 \iff 2x(x-3) = 0 \iff x = 0$ eller $x = 3$, varav endast $x = 0$ uppfyller villkoret $-2 < x < 1/2$. Svar: $x = 0$
3. (a) $\tan\left(5x + \frac{\pi}{5}\right) = \tan 8x \iff$ /om $8x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ / $\iff 5x + \frac{\pi}{5} = 8x + n\pi \iff 3x = \frac{\pi}{5} - n\pi \iff x = \frac{\pi}{15} - \frac{n\pi}{3}$ där n är heltal. Alla dessa x ger $8x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (kontrollera). Svar: $x = \frac{\pi}{15} - \frac{n\pi}{3}$ där n är heltal
- (b) Beloppet föranleder falluppdelning, $|x| = \begin{cases} x & , \text{ om } x \geq 0 \\ -x & , \text{ om } x \leq 0. \end{cases}$
 För $x \geq 0$ fås ekvationen $2e^x = 4 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2$ som uppfyller villkoret $x \geq 0$.
 För $x \leq 0$ fås ekvationen $e^{-x} + e^x = 4 \iff (e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0 \iff e^x = 2 \pm \sqrt{3}$.
 $x = 2 + \sqrt{3} > 1$ ger $x = \ln(2 + \sqrt{3}) > 0$.
 $x = 2 - \sqrt{3} \in]0, 1[$ ger $x = \ln(2 - \sqrt{3}) < 0$.
 Svar: $x = \ln 2$ eller $x = \ln(2 - \sqrt{3})$
4. $z^4 + 8(1 + i\sqrt{3}) = 0 \iff z^4 = -8(1 + i\sqrt{3}) = 16 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16e^{4\pi i/3}$. Med $z = re^{iv}$ fås $z^4 = 16e^{4\pi i/3} \iff (re^{iv})^4 = 16e^{4\pi i/3} \iff r^4 e^{4iv} = 16e^{4\pi i/3}$.
 Identifiering av beloppet ger $r^4 = 16 \iff r = 2$ (ty $r \geq 0$), identifiering av argumentet ger $4v = 4\pi/3 + 2n\pi \iff v = \pi/3 + n\pi/2$. Således är $z = 2e^{(\pi/3 + n\pi/2)i}$ där $n = 0, 1, 2, 3$. Eftersom den polära framställningen ger standardvinklar, förenklar vi genom att skriva talen på rektangulär form och får
 $z_1 = 2e^{\pi i/3} = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 2e^{\pi i/3 + \pi i/2} = iz_1 = i(1 + i\sqrt{3}) = i - \sqrt{3}$,
 $z_3 = 2e^{\pi i/3 + \pi i} = -z_1 = -1 - i\sqrt{3}$, $z_4 = 2e^{\pi i/3 + 3\pi i/2} = -z_2 = \sqrt{3} - i$
 Svar: $z = \pm(1 + i\sqrt{3})$, $z = \pm(\sqrt{3} - i)$

$$5. \sqrt{3} \cos 3v - \sin 3v = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3v - \frac{1}{2} \sin 3v \right) = 2 \left(\sin \frac{2\pi}{3} \cos 3v + \cos \frac{2\pi}{3} \sin 3v \right) =$$

$$= 2 \sin \left(3v + \frac{2\pi}{3} \right). \text{ Därmed fås}$$

$$\sqrt{3} \cos 3v - \sin 3v = 1 \iff 2 \sin \left(3v + \frac{2\pi}{3} \right) = 1 \iff \sin \left(3v + \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff 3v + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \text{ eller } 3v + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \iff$$

$$\iff 3v = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ eller } 3v = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \iff v = -\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3} \text{ eller } v = \frac{\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3} \text{ där } n \text{ är heltal.}$$

$$\text{Svar: } v = -\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3} \text{ eller } v = \frac{\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3} \text{ där } n \text{ är heltal}$$

$$6. \text{ Eftersom } -\frac{\pi}{2} < \arctan(-\sqrt{2}) < 0 \text{ och } \frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) < \pi \text{ så är } -\frac{3\pi}{2} < u < -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{ Dessutom är } \tan(\arctan(-\sqrt{2})) = -\sqrt{2} \text{ och } \tan\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\sin(\arccos(-\frac{1}{3}))}{\cos(\arccos(-\frac{1}{3}))} =$$

$$= \frac{\sqrt{8}/3}{-1/3} = -\sqrt{8}, \text{ eftersom } t = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \text{ ger } \sin t > 0 \text{ och därmed}$$

$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)} = \frac{\sqrt{8}}{3}. \text{ Således är}$$

$$\tan u = \frac{\tan(\arctan(-\sqrt{2})) - \tan\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)}{1 + \tan(\arctan(-\sqrt{2})) \cdot \tan\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{8}}{1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{5}, \text{ dvs}$$

$$u = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right) + n\pi \text{ för något heltal } n. \text{ Endast } n = -1 \text{ ger en vinkel i intervallet}$$

$$\left] -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right], \text{ eftersom } 0 < \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right) < \frac{\pi}{2}. \quad \text{Svar: } u = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right) - \pi$$

$$7. \text{ (a) Binomialsatsen ger } 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{ vilket skulle visas.}$$

$$\text{ (b) Binomialsatsen ger } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{2k} x = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\tan^2 x)^k \cdot 1^{n-k} = (1 + \tan^2 x)^n =$$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^n. \text{ Således är } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{2k} x = (2n)^n \iff \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^n = (2n)^n \iff$$

$$\iff (\cos^2 x)^n = \left(\frac{1}{2n} \right)^n \iff \text{eftersom } \cos^2 x \geq 0 \iff \cos^2 x = \frac{1}{2n} \iff$$

$$\iff \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2n}} \iff \text{eftersom } -1 \leq \pm \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq 1 \iff$$

$$\iff x = \pm \arccos\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + 2m\pi \text{ där } m \text{ är heltal.}$$

$$\text{Svar: } x = \pm \arccos\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + 2m\pi \text{ där } m \text{ är heltal}$$