

## Dugga 1 i Matematisk grundkurs

2018-09-22 kl 8.00–11.00

Inga hjälpmedel är tillåtna (penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva *får* användas). Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

**Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget.**

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Beräkna  $\sum_{k=10}^{209} (2 - k)$ . (1 p)

(b) Ange medelpunkt och radie till cirkeln  $x^2 + y^2 = 2x - 6y - 8$  samt minsta avståndet från denna cirkel till linjen  $y = 1$ . (2 p)

2. Lös ekvationen  $3x = \sqrt{6x + 13} - 5$ .

3. Lös olikheten  $\frac{4x - 4}{4x^2 - 4x - 3} < \frac{1}{x - 2}$ .

4. Faktorisera polynomet  $p(z) = 2z^4 - 10z^3 + 15z^2 + 50z - 125$  så långt som möjligt i komplexa faktorer.

**Ledning:** Det finns ett nollställe  $z_0$  till  $p$  sådant att  $\operatorname{Re} z_0 = \operatorname{Im} z_0$ .

5. Beräkna  $\sum_{k=0}^{98} \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k}}$ .

## Lösningsförslag TATM79 2018-09-22

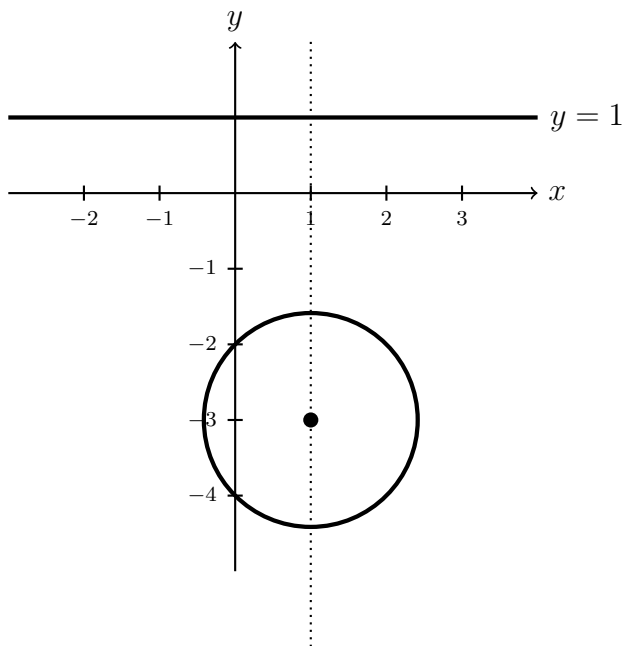
1. (a) Summan är aritmetisk med  $209 - 10 + 1 = 200$  termer, så

$$\sum_{k=10}^{209} (2 - k) = \frac{-8 - 207}{2} \cdot 200 = -21500.$$

- (b) Vi kvadratkompletterar uttrycket och finner att

$$x^2 + y^2 = 2x - 6y - 8 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 2.$$

Cirkelns mittpunkt är således  $(1, -3)$  och radien  $\sqrt{2}$ :



Vi ser i figuren att det kortaste avståndet mellan cirkeln och linjen  $y = 1$  ges av det lodräta avståndet mellan punkten  $(1, 1)$  och cirkelns "topp." Eftersom cirkeln har radien  $\sqrt{2}$  och avståndet mellan  $x$ -axeln och cirkelns mittpunkt är 3, blir det eftersökta avståndet

$$1 + 3 - \sqrt{2} = 4 - \sqrt{2}.$$

**Svar.** (a)  $-21500$  (b) medelpunkt  $(1, -3)$ , radie  $\sqrt{2}$ , avstånd  $4 - \sqrt{2}$ .

2. Låt oss stuva om i ekvationen för att sedan kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$\begin{aligned} 3x = \sqrt{6x + 13} - 5 &\Leftrightarrow \sqrt{6x + 13} = 3x + 5 \\ &\Rightarrow 6x + 13 = (3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25 \\ &\Leftrightarrow 9x^2 + 24x + 12 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)(x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ eller } x = -2. \end{aligned}$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om  $x = -2$  ser vi att

$$VL = -6 \text{ och } HL = \sqrt{-12 + 13} - 5 = \sqrt{1} - 5 = 1 - 5 = -4$$

så  $x = -2$  är *inte* en lösning. Om  $x = -\frac{2}{3}$  är

$$VL = -2 \text{ och } HL = \sqrt{-6 \cdot \frac{2}{3} + 13} - 5 = \sqrt{9} - 5 = 3 - 5 = -2.$$




Eftersom vänsterled och högerled stämmer överens så är  $x = -\frac{2}{3}$  en lösning.

**Svar:**  $x = -\frac{2}{3}$ .

3. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\begin{aligned} \frac{4x-4}{4x^2-4x-3} < \frac{1}{x-2} &\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x-2} - \frac{4x-4}{(2x+1)(2x-3)} \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{8x-11}{(x-2)(2x+1)(2x-3)}. \end{aligned}$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

	$-\frac{1}{2}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{3}{2}$	2
$2x+1$	-	0	+	+
$8x-11$	-	-	0	+
$2x-3$	-	-	-	0
$x-2$	-	-	-	-
$\frac{8x-11}{(x-2)(2x+1)(2x-3)}$	+		-	0
	+		-	

Vi ser ur tabellen att uttrycket är positivt precis då  $x < -\frac{1}{2}$  eller  $\frac{11}{8} < x < \frac{3}{2}$  eller  $x > 2$ .

**Svar:**  $x < -\frac{1}{2}$  eller  $\frac{11}{8} < x < \frac{3}{2}$  eller  $x > 2$ .

4. Från ledningen vet vi att det finns en rot  $z = a(1+i)$  för något  $a \in \mathbf{R}$ . Då måste

$$\begin{aligned} 0 &= p(a+ai) = 2a^4(1+i)^4 - 10a^3(1+i)^3 + 15a^2(1+i)^2 + 50a(1+i) - 125 \\ &= -8a^4 - 20a^3(-1+i) + 30ia^2 + 50a(1+i) - 125 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -8a^4 + 20a^3 + 50a - 125 = 0, \\ -20a^3 + 30a^2 + 50a = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

där vi delat upp i real- och imaginärdel. Imaginärdelen ser vi direkt har  $a = 0$  som ett nollställe så vi börjar med att ge oss på den:

$$0 = -20a^3 + 30a^2 + 50a = -20a \left( a^2 - \frac{3}{2}a - \frac{5}{2} \right) \Leftrightarrow a = 0 \text{ eller } a = \frac{3 \pm 7}{4}.$$

Vi ser att varken  $a = 0$  eller  $a = -1$  löser ekvationen för realdelen:

$$-8a^4 + 20a^3 + 50a - 125 = 0,$$

men att  $a = 5/2$  är en lösning även till denna ekvation. Eftersom koefficienterna i polynomet är reella kommer även  $z = a(1-i)$  att vara en rot. Således erhåller vi två

nollställena  $z = \frac{5}{2}(1 \pm i)$ . Detta medför att  $z^2 - 5z + \frac{25}{2}$  är en faktor i  $p(z)$ . Polynomdivision visar att

$$p(z) = \left(z^2 - 5z + \frac{25}{2}\right)(2z^2 - 10).$$

Eftersom  $2z^2 - 10 = 2(z - \sqrt{5})(z + \sqrt{5})$  blir faktoriseringen

$$p(z) = 2\left(z - \frac{5}{2}(1+i)\right)\left(z - \frac{5}{2}(1-i)\right)(z - \sqrt{5})(z + \sqrt{5}).$$

**Alternativt.** Man även utföra en polynomdivision av  $p(z)$  med faktorn  $z^2 - 2az + 2a^2$ . Om  $z = a(1 \pm i)$  är rötter till polynomet måste denna faktor förekomma. Man erhåller då ett villkor på  $a$  som leder till att  $a = 5/2$  precis som ovan.

**Svar:**  $p(z) = 2\left(z - \frac{5}{2}(1+i)\right)\left(z - \frac{5}{2}(1-i)\right)(z - \sqrt{5})(z + \sqrt{5}).$

5. Eftersom

$$\frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k}}{k+2-k} = \frac{\sqrt{k+2}}{2} - \frac{\sqrt{k}}{2}$$

så kan summan skrivas

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{98} \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k}} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{98} \sqrt{k+2} - \sum_{k=0}^{98} \sqrt{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{97} + \sqrt{98} + \sqrt{99} + \sqrt{100}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{97} + \sqrt{98}) \\ &= / \text{teleskopsumma} / = \frac{1}{2} (\sqrt{99} + \sqrt{100} - \sqrt{1}) = \frac{9 + \sqrt{99}}{2}. \end{aligned}$$

**Svar:**  $\frac{9 + \sqrt{99}}{2}.$