Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN5

Dugga 1 i Matematisk grundkurs

2018-09-10 kl 8.00–11.00

Inga hjälpmedel är tillåtna (penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva *får* användas).

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=3}^{122} \frac{(-1)^k}{2^{2k}}$. (1 p)

   (b) Bestäm alla komplexa lösningar till $3z - i\bar{z} = 2 + \operatorname{Re} z$. (1 p)

   (c) Pizzerian 'Equatione' är vida berömd för sina Bamsepizzor där kunden får välja ut 10 olika pålägg att lägga på pizzan. Det finns 14 olika pålägg att välja bland. Hur många olika sorters Bamsepizzor finns det? (1 p)

2. Lös olikheten $\dfrac{4}{x+4} + \dfrac{1}{x-2} \leq 1$.

3. Lös ekvationen $|x-3| - 2|2+x| = x+1$.

4. Vilka komplexa z uppfyller sambandet $iz^2 + (4+2i)z = 6i$?

5. Hur många reella lösningar har ekvationen $|2x^2+5x-3| = K$ för alla värden på den reella konstanten K?

Lösningsförslag TATM79 2018-09-10

1. (a) Vi ser att

$$\sum_{k=3}^{122} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} = \sum_{k=3}^{122} \left(-\frac{1}{4}\right)^k.$$

Summan är alltså geometrisk med $122-3+1=120$ termer, kvoten $-1/4$ och första term $(-1/4)^3$, så

$$\sum_{k=3}^{122} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = -\frac{1}{4^3} \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{120}}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4^3} \cdot \frac{1-\frac{1}{4^{120}}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{80}\left(\frac{1}{4^{120}}-1\right).$$

(b) Låt $z = a+ib$ (med $a, b \in \mathbf{R}$). Då gäller att

$$\begin{aligned} 3z - i\bar{z} = 2 + \operatorname{Re} z \quad &\Leftrightarrow \quad 3(a+bi) - i(a-bi) = 2+a \quad \Leftrightarrow \quad 2a-b+i(3b-a) = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a-b=2, \\ 3b-a=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b=2/5, \\ a=6/5. \end{cases} \end{aligned}$$

Alltså finns det precis en lösning: $z = \dfrac{6}{5} + \dfrac{2i}{5}$.

(c) Vi ska välja 10 av 14 pålägg och ordningen spelar ingen roll. Då finns det

$$\binom{14}{10} = \binom{14}{4} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1001$$

olika sorter.

Svar. (a) $\dfrac{1}{80}\left(\dfrac{1}{4^{120}}-1\right)$ (b) $z = \dfrac{6}{5} + \dfrac{2i}{5}$ (c) 1001.

2. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x+4} + \frac{1}{x-2} \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{4(x-2)+x+4-(x+4)(x-2)}{(x+4)(x-2)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{-x^2+3x+4}{(x+4)(x-2)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-4)(x+1)}{(x+4)(x-2)} \geq 0. \end{aligned}$$

Observera att vi ändrade riktningen på olikheten i sista steget. Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		-4		-1		2		4	
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(x-4)(x+1)}{(x+4)(x-2)}$	$+$	☠	$-$	0	$+$	☠	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $x < -4$, $-1 \leq x < 2$ eller $x \geq 4$.

Svar: $x < -4$ eller $-1 \leq x < 2$ eller $x \geq 4$.

3. Beloppen definieras enligt

$$|x-3| = \begin{cases} 3-x, & x \le 3, \\ x-3, & x \ge 3 \end{cases} \qquad \text{och} \qquad |2+x| = \begin{cases} -(2+x), & x \le -2, \\ 2+x, & x \ge -2. \end{cases}$$

Intressanta punkter för de olika beloppen som ingår i ekvationen är $x = -2$ och $x = 3$. Vi delar upp i tre olika fall.

Fall 1: $x \le -2$. Då är

$$|x-3| - 2|2+x| = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad (3-x) + 2(2+x) = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 7 = 1,$$

vilket innebär att det inte kan finnas någon lösning när $x \le -2$.

Fall 2: $-2 \le x \le 3$. Då är

$$|x-3| - 2|2+x| = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad (3-x) - 2(2+x) = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2},$$

vilket ligger i rätt intervall. Alltså är $x = -\dfrac{1}{2}$ en lösning.

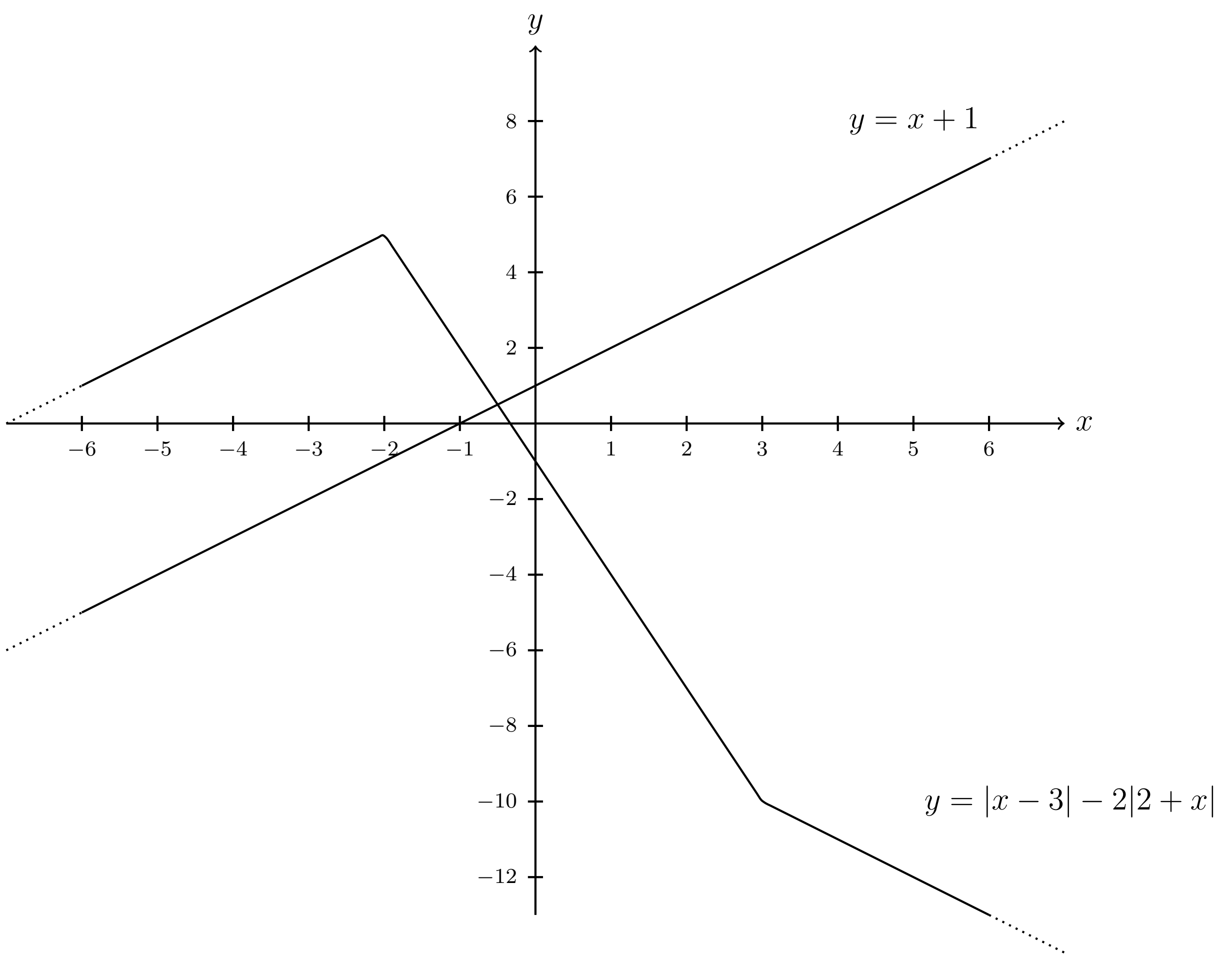
Fall 3: $x \ge 3$. Då är

$$|x-3| - 2|2+x| = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x-3-2(2+x) = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4,$$

vilket *inte* ligger i rätt intervall. Alltså ingen lösning.

Svar: $x = -\dfrac{1}{2}$.

Man kan även skissa vänster- och högerled i en graf för att se om svaret verkar rimligt.



4. Vi ser att

$$\begin{aligned} iz^2 + (4+2i)z = 6i \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 + (2-4i)z = 6 \\ &\Leftrightarrow \quad (z+1-2i)^2 = 6 + (1-2i)^2 = 3-4i. \end{aligned}$$

Låt $w = z + 1 - 2i$. Vi löser

$$w^2 = 3 - 4i, \tag{1}$$

genom att låta $w = a + bi$. Detta leder till att

$$w^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 3 - 4i.$$

Likhet gäller precis då real- respektive imaginärdelarna av ekvationen är lika, så

$$a^2 - b^2 = 3 \tag{2}$$

och

$$ab = -2. \tag{3}$$

Observera även att (1) medför att

$$|w^2| = |3 - 4i| = \sqrt{9+16} = 5$$

och eftersom $|w^2| = |w|^2 = a^2 + b^2$ vet vi nu att

$$a^2 + b^2 = 5. \tag{4}$$

Genom att addera ekvation (2) och ekvation (4) ser vi att

$$2a^2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 2.$$

Om $a = 2$ blir $b = -1$ och om $a = -2$ blir $b = 1$ (enligt ekvation (3)). Vi har alltså lösningarna

$$w = 2 - i \qquad \text{och} \qquad w = -2 + i$$

till ekvation (1). Eftersom $z = w - 1 + 2i$ följer det att

$$z = 1 + i \qquad \text{och} \qquad z = -3 + 3i$$

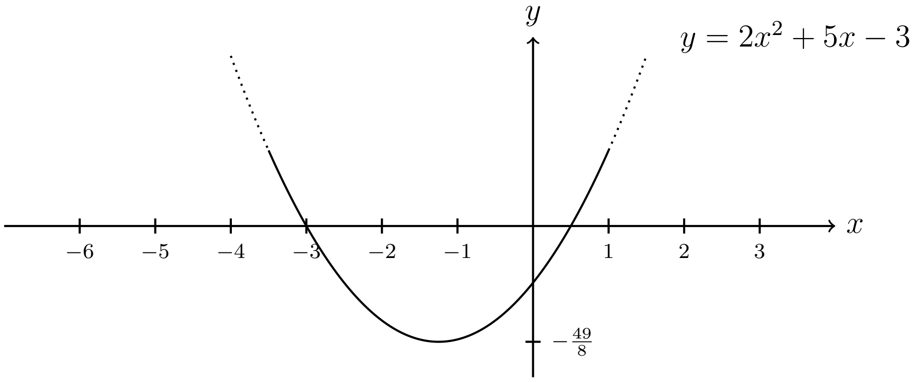
är lösningarna till ekvationen.

Svar: $z = 1 + i$, $z = -3 + 3i$.

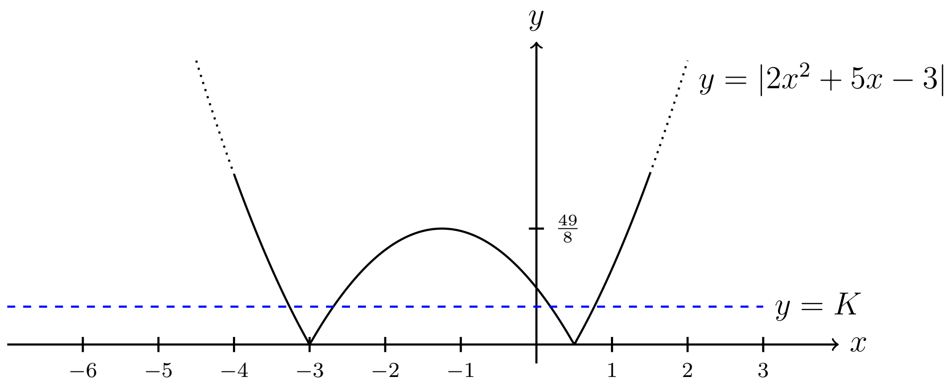
5. Eftersom

$$2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$$

kan vi rita hur polynomet $y = 2x^2 + 5x - 3$ ser ut.



Grafen för funktionen $y = |2x^2 + 5x - 3|$ erhåller vi genom att spegla de delar där polynomet $2x^2 + 5x - 3$ är negativt i x-axeln. Ifrån kvadratkompletteringen ovan följer det att
$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \text{ eller } x = \frac{1}{2}.$$
Alltså får vi följande utseende.



Vi ser direkt att det saknas lösningar när $K < 0$. När $K = 0$ finns precis två lösningar (där polynomet skär x-axeln). För $0 < K < 49/8$ så finns det precis 4 lösningar. När $K = 49/8$ kommer linjen $y = K$ precis tangera där $x = -5/4$, så det finns i detta fall 3 lösningar. För $K > 49/8$ har vi två lösningar.

Alternativt. Vi kan även studera hur lösningarna ser ut mer direkt. Givetvis saknas lösningar om $K < 0$ eftersom beloppet alltid är större än lika med noll. Så antag att $K \geq 0$. Då gäller att

$$|2x^2 + 5x - 3| = K \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 5x - 3 = \pm K \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} - \frac{3}{2} = \pm\frac{K}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49 \pm 8K}{16}.$$

Om $K = 0$ får vi precis två lösningar. När $0 < 8K < 49$ finns det precis fyra lösningar (två från $+8K$ och två från $-8K$). När $8K = 49$ blir det precis tre lösningar då $49 - 8K = 0$ bara ger en lösning. När $8K > 49$ kommer vi endast att få lösningar med $+8K$, vilket resulterar i två lösningar.

Svar:

$$\begin{aligned}
K < 0: &\quad \text{Inga lösningar,}\\
K = 0: &\quad \text{Två lösningar,}\\
0 < K < \frac{49}{8}: &\quad \text{Fyra lösningar,}\\
K = \frac{49}{8}: &\quad \text{Tre lösningar,}\\
K > \frac{49}{8}: &\quad \text{Två lösningar.}
\end{aligned}$$