

## Dugga 1 i Matematisk grundkurs

2017-09-16 kl 8.00–11.00

Inga hjälpmedel är tillåtna (penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva *får* användas).

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

**Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget.**

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Beräkna  $\sum_{n=-1}^{104} \frac{1}{3^{2n}}$ . (1 p)

(b) Bestäm imaginärdelen till  $z = i \frac{4+i}{1-2i} - 2i$ . (1 p)

(c) Bestäm största värdet av  $f(x) = 10x - 2x^2 - 16$  med hjälp av kvadratkomplettering. (1 p)

2. Lös olikheten  $\frac{2x}{x^2 + x - 12} \leq 1$ .

3. Lös ekvationen  $|3 - 2t| - |t + 2| = t$ .

4. Bestäm en ekvation för den cirkel med centrum i  $(1, 3)$  som tangerar linjen  $y = \frac{1}{2} - 2x$ . För full poäng krävs en lagom stor och omsorgsfullt ritad figur.

5. Ekvationen  $p(z) = z^4 - iz^3 - (6 - 6i)z^2 + (6 + 8i)z - 16 + 12i = 0$  har minst en rent imaginär rot. Lös ekvationen fullständigt.

# Lösningförslag TATM79 2017-09-16

1. (a) Summan är geometrisk med kvoten  $q = 1/9$  och 106 termer. Alltså,

$$\sum_{n=-1}^{104} \frac{1}{3^{2n}} = 9 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{106}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{81}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{106}\right).$$

- (b) Först skriver vi om  $z$  på formen  $a + ib$ :

$$z = i \frac{4+i}{1-2i} - 2i = i \frac{(4+i)(1+2i)}{5} - 2i = \frac{2}{5}i - \frac{9}{5} - 2i = -\frac{9}{5} - \frac{8}{5}i.$$

Här ser vi direkt att imaginärdelen blir  $-\frac{8}{5}$ .

- (c) Vi kvadratkompletterar och finner att

$$\begin{aligned} f(x) &= -2(x^2 - 5x + 8) = -2 \left( \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 8 \right) \\ &= -\frac{7}{2} - 2 \left(x - \frac{5}{2}\right)^2. \end{aligned}$$



Det är här tydligt att  $f(x) \leq -\frac{7}{2}$  med likhet endast då  $x = \frac{5}{2}$ . Största värdet är alltså  $-\frac{7}{2}$ .

**Svar:** (a)  $\frac{81}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{106}\right)$     (b)  $-\frac{8}{5}$     (c)  $-\frac{7}{2}$ .

2. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{2x}{x^2 + x - 12} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + x - 12} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+3)}{(x+4)(x-3)} \geq 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

	-4	-3	3	4	
$x+4$	-	0	+	+	+
$x+3$	-	-	0	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
$x-4$	-	-	-	-	0
$\frac{(x-4)(x+3)}{(x+4)(x-3)}$	+		-	0	+
		-	0	+	+

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då  $x < -4$ ,  $-3 \leq x < 3$ , eller  $x \geq 4$ .

**Svar:**  $x < -4$ ,  $-3 \leq x < 3$  eller  $x \geq 4$ .

3. Beloppen definieras enligt

$$|t+2| = \begin{cases} t+2, & t \geq -2, \\ -t-2, & t \leq -2 \end{cases} \quad \text{och} \quad |3-2t| = \begin{cases} 3-2t, & t \leq \frac{3}{2}, \\ 2t-3, & t \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Speciellt intressanta punkter (där något växlar tecken) för de olika beloppen som ingår i ekvationen är  $t = -2$  och  $t = \frac{3}{2}$ . Vi delar upp i tre olika fall.

**Fall 1:**  $t \leq -2$ . Då är

$$|3 - 2t| - |t + 2| = t \Leftrightarrow 3 - 2t + t + 2 = t \Leftrightarrow t = \frac{5}{2},$$

vilket *inte* ligger i rätt intervall.

**Fall 2:**  $-2 \leq t \leq \frac{3}{2}$ . Då är

$$|3 - 2t| - |t + 2| = t \Leftrightarrow 3 - 2t - t - 2 = t \Leftrightarrow t = \frac{1}{4},$$

vilket ligger i rätt intervall. Alltså är  $t = \frac{1}{4}$  en lösning.

**Fall 3:**  $t \geq \frac{3}{2}$ . Då är

$$|3 - 2t| - |t + 2| = t \Leftrightarrow 2t - 3 - t - 2 = t \Leftrightarrow -5 = 0,$$

vilket inte är sant. Alltså inga lösningar här.

**Svar:**  $t = \frac{1}{4}$ .

4. Cirkeln kan beskrivas med ekvationen

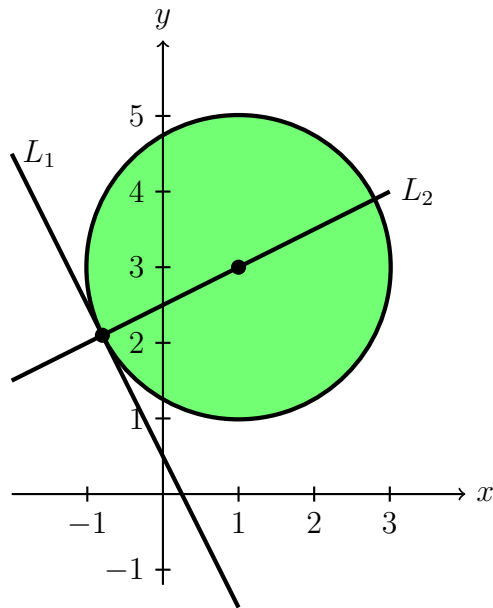
$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = r^2,$$

där  $r > 0$  är radien (i nuläget okänd). Om linjen  $L_1 : 2y = 1 - 4x$  ska tangera cirkeln måste linjen  $L_2$  som går genom cirkelns mittpunkt och tangeringspunkten vara vinkelrät mot  $L_1$ . Således har  $L_2$  riktningskoefficienten  $\frac{1}{2}$  och eftersom  $(1, 3)$  ligger på  $L_2$  måste  $2y = x + 5$  vara ekvationen för  $L_2$ . Tangeringspunkten där  $L_1$  tangerar cirkeln måste sammanfalla med skärningspunkten mellan  $L_1$  och  $L_2$ . Linjerna skär varandra när  $x + 5 = 1 - 4x \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$ . Den eftersökta punkten blir således  $\left(-\frac{4}{5}, \frac{21}{10}\right)$ . Vi kan nu räkna ut cirkelns radie:

$$r^2 = \left(-\frac{4}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{21}{10} - 3\right)^2 = \frac{81}{25} + \frac{81}{100} = \frac{81}{20},$$

så radien är alltså  $\frac{9}{\sqrt{20}}$ .

Vi ritar en figur och ser till att allt verkar rimligt.



**Svar:**  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = \frac{81}{20}$ .

5. Låt  $z = iy$ ,  $y \in \mathbf{R}$ , vara en rent imaginär rot till  $p(z)$ . Då är

$$0 = p(iy) = y^4 - y^3 + (6 - 6i)y^2 + (6i - 8)y - 16 + 12i$$

ekvivalent med

$$y^4 - y^3 + 6y^2 - 8y - 16 = 0 \quad (1)$$

och

$$-6y^2 + 6y + 12 = 0, \quad (2)$$

där vi delat upp i real- och imaginärdel (eftersom vi vet att  $y \in \mathbf{R}$ ). Vi löser ekvation (2):

$$-6y^2 + 6y + 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow y = 2 \text{ eller } y = -1.$$

Här är alltså två kandidater. Kontroll i ekvation (1) visar direkt att  $p(-i) = p(2i) = 0$ . Således erhåller vi att  $(z + i)(z - 2i) = z^2 - iz + 2$  är en faktor i  $p(z)$ . Polynomdivision leder till resultatet

$$p(z) = (z + i)(z - 2i)(z^2 - 8 + 6i).$$

Vi hittar rötterna till den sista faktorn. Låt  $z = a + bi$  med  $a, b \in \mathbf{R}$ . Vi söker lösningar till

$$z^2 = 8 - 6i \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = 8 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 8, \\ 2ab = -6. \end{cases}$$

Vidare gäller att

$$a^2 + b^2 = |z|^2 = |z^2| = |8 - 6i| = \sqrt{100} = 10,$$

så  $2a^2 = 18 \Leftrightarrow a = \pm 3$ . Om  $a = 3$  blir  $b = -1$  och om  $a = -3$  blir  $b = 1$  enligt ekvationen  $2ab = -6$ . Således måste  $z = 3 - i$  och  $z = -3 + i$  vara lösningarna.

**Svar:**  $p(z) = 0$  då  $z = -i$ ,  $z = 2i$ ,  $z = 3 - i$ , eller  $z = -3 + i$ .